

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
“ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ З ПЛОЩИНОЮ”**

ЧАСТИНА II

Затверджено
на засіданні Вченої Ради
фізико-математичного факультету
Протокол № 3 від 25 травня 2009 р.

Методичні вказівки з нарисної геометрії “Перетин поверхонь з площиною”.
Частина П.

Укл. К.В. Сарнацька, Н.С. Дьяченко, Г.Г. Допіра, О.О. Голова, Н.В. Півень. –
К.: НТУУ “КПІ”, 2009. - 17 с.

Укладачі: Катерина Василівна Сарнацька
Неллі Сергіївна Дьяченко
Ганна Георгіївна Допіра
Ольга Олександрівна Голова
Наталія Василівна Півень

Відповідальний редактор В.В. Ванін

Рецензент О.Г. Гетьман

Перетин поверхні з площиною

Перетин поверхні з площиною є плоскою лінією, форма якої залежить від типу поверхні та взаємного положення січної площини і поверхні. Лінія перетину будується за допомогою точок перетину найпростіших ліній цієї поверхні з січною площиною. Для гранних поверхонь – це ребра, для конусів та циліндрів – це твірні або паралелі, для сфери – паралелі.

На лінії перетину виділяють характерні (опорні) та допоміжні точки. Перед усім лінії на поверхні вибирають таким чином, щоб визначити характерні точки. Це точки, які відрізняються своїм особливим розташуванням відносно площин проекцій, або які займають виняткове положення на кривій:

- найближча та найбільш віддалена точка відносно кожної з площин проекцій (екстремальні точки);
- точки, які розташовані на проекціях обрисних твірних на всіх площинах проекцій (межі видимості);
- характерні точки кривої перетину (вершина ламаної – для гранних поверхонь, точки на кінцях великої та малої осей еліпса, вершини дуг парабол та гіпербол, кінці дуг кривих тощо).

Якщо для виявлення форми лінії перетину характерних точок недостатньо, будують проміжні точки в тих місцях і в тій кількості, щоб криву можна було провести за допомогою лекала.

Перетин циліндра площиною

У перерізі прямого кругового циліндра площиною можуть утворитися такі фігури:

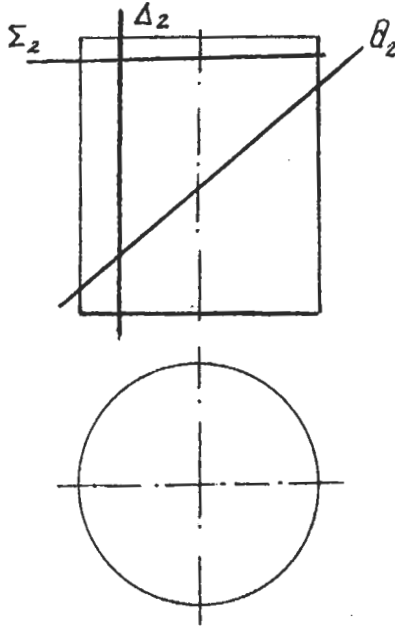


Рис. 1

- а) прямокутник, якщо площина перерізу паралельна до осі циліндра - Δ (Δ_2);
- б) коло, якщо площина перпендикулярна до осі - Σ (Σ_2);
- в) еліпс, якщо площина нахилена до осі - Θ (Θ_2).

Побудова проєкцій лінії перетину циліндра площиною окремого положення

На рисунку 2 наведено приклад побудови лінії перетину циліндра фронтально-проєкціуючою площиною Σ (Σ_2). Лінія перетину – еліпс.

Горизонтальна проєкція еліпса збігається з колом. Точки 1 і 3 визначають малу вісь еліпса, точки 2 і 4 – велику вісь еліпса – на площині Π_3 .

Розглянемо побудову лінії перетину похилого еліптичного циліндра площиною загального положення Θ ($f^0 \cap h^0$) (рис. 3). Для визначення точок лінії перетину використовуємо спосіб заміни площин проєкцій, щоб перетворити площину загального положення у проєкціуючу. Проводимо нову вісь $x_1 \perp h_1^0$.

Вибираємо на фронтальному сліді довільну точку А, будуємо її проєкції – A_1 , A_4 .

Площина Θ перетворюється в слід-проєкцію на площині Π_4 . Будуємо проєкцію циліндра на Π_4 . Обрисові твірні проходять через точки 2 і 6. Для побудови лінії перетину спочатку треба побудувати характерні точки, які визначають границі видимості на Π_1 і Π_2 . Ці точки належать твірним, які проходять через точки основи 1 і 5 та 4 і 8. Ці твірні будуємо на площині Π_4 , на перетині їх зі слідом-проєкцією Θ_4 визначаємо характерні точки: С і D, Е і F.

Допоміжні точки лінії перетину визначаються при перетині твірних поверхні зі слідом-проєкцією площини.

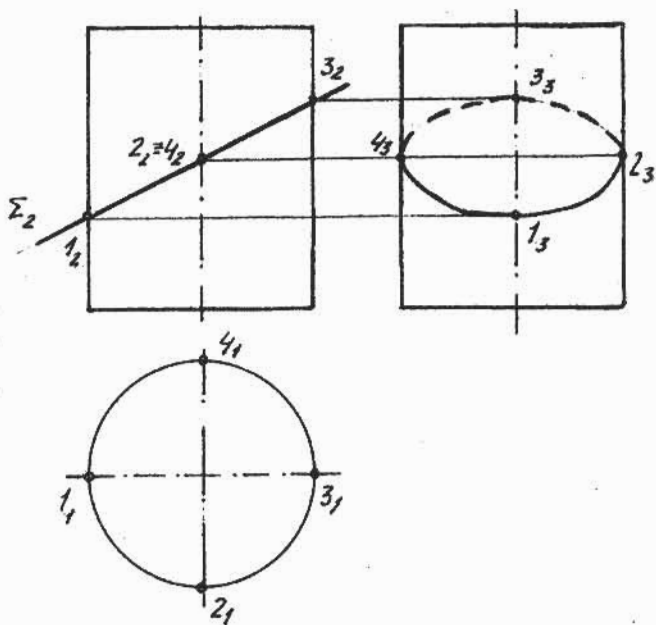


Рис. 2

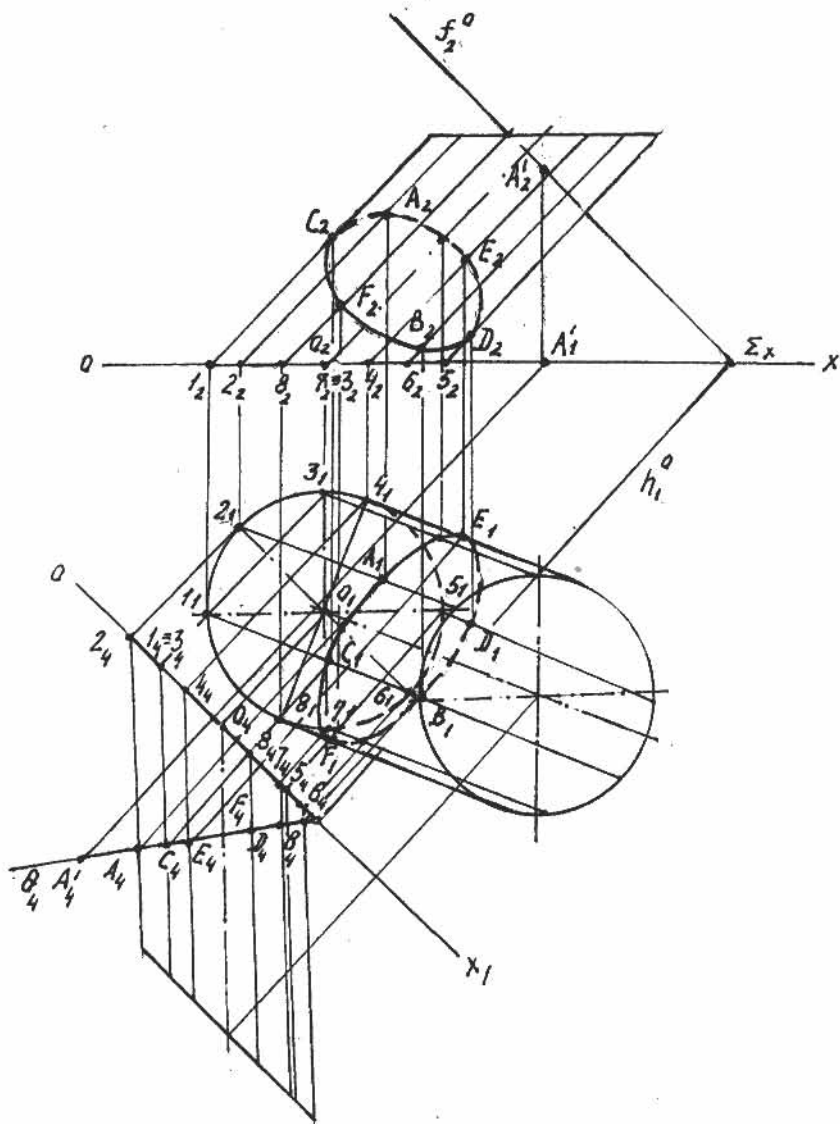


Рис. 3

Перетин конуса площиною

Залежно від напрямку січної площини в перерізі прямого кругового конуса можуть утворюватись (рис. 4):

- а) коло, якщо січна площина паралельна основі конуса, $\varphi=90^\circ$ (Ω_2) (рис. 4,а);
- б) трикутник, якщо січна площина проходить через вершину конуса - Δ_2 (рис. 4 в);
- в) еліпс, якщо $\varphi>\alpha$ (Σ_2) (рис. 4, а);
- г) парабола, якщо січна площина паралельна твірній конуса, $\varphi=\alpha$ (Θ_2) (рис. 4, б);
- д) гіпербола, якщо січна площина паралельна двом твірним $\varphi<\alpha$ (Γ_2) (рис. 4, в).

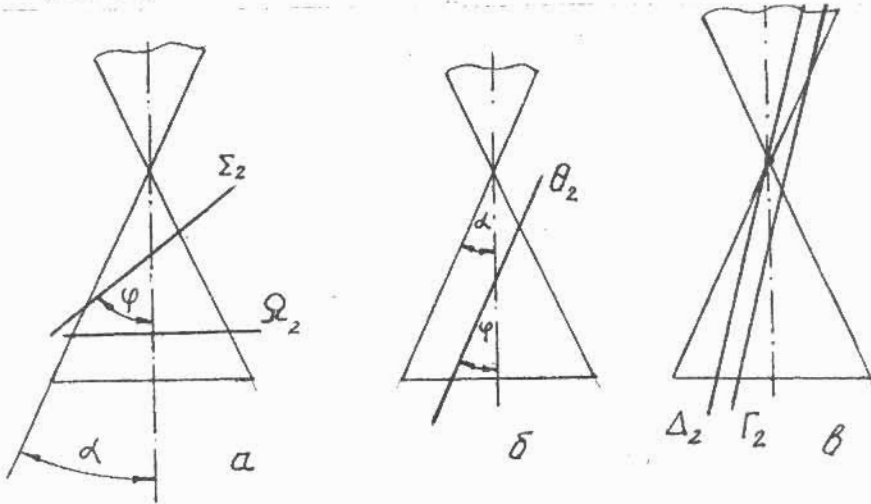


Рис. 4

Розглянемо побудову ліній перетину конуса.

На рис. 5 показано побудову параболи, січна площина Θ (Θ_2) паралельна твірній конуса. Вершина параболи в точці 3, точки 4 і 5 визначають границі видимості на Π_3 , вони знаходяться на обрисових твірних поверхні конуса.

На рис. 6 січна площина Σ (Σ_2) перетинає конус по еліпсу (частині еліпса більш половини). Для побудови використовуємо метод повних перерізів. Проводимо слід-проекцію площини Σ (Σ_2) по повного перетину з поверхнею конуса, щоб визначити характерні точки еліпса. Точки 1 і 2 визначають велику вісь еліпса. Середина відрізка (1-2) визначає проєкції точок 3 і 4. Відрізок (3-4) – мала вісь еліпса. Проєкції точок 3 і 4 будуюмо із умови належності поверхні

конуса. Точки 5 і 6 визначають границі видимості на профільній проекції, вони належать обрисовим твірним конуса.

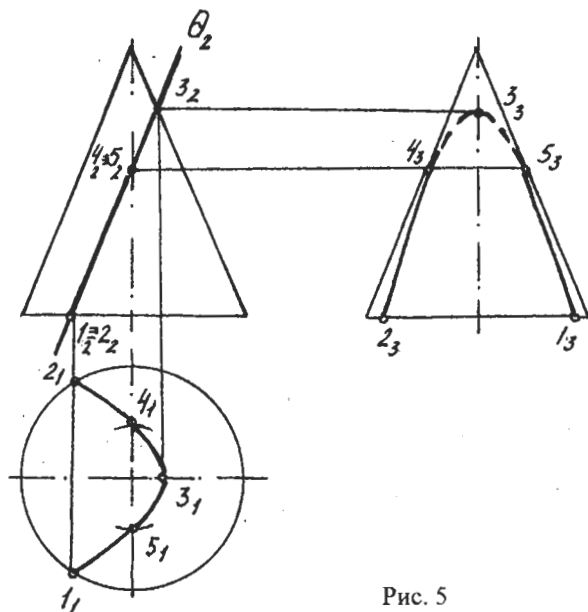


Рис. 5

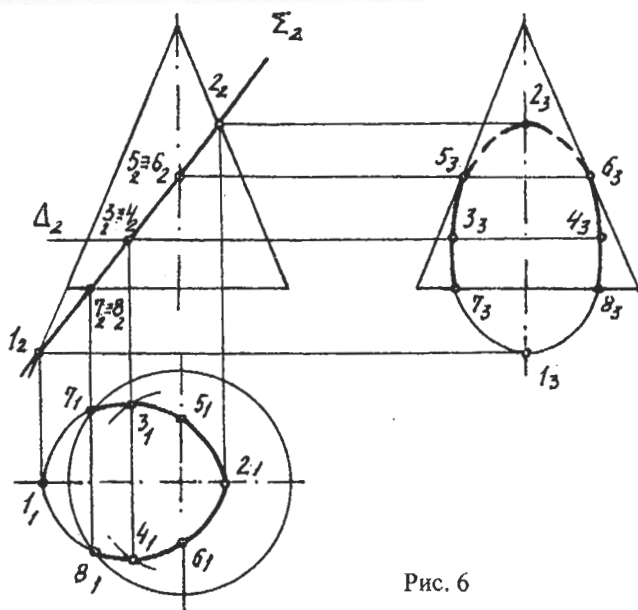


Рис. 6

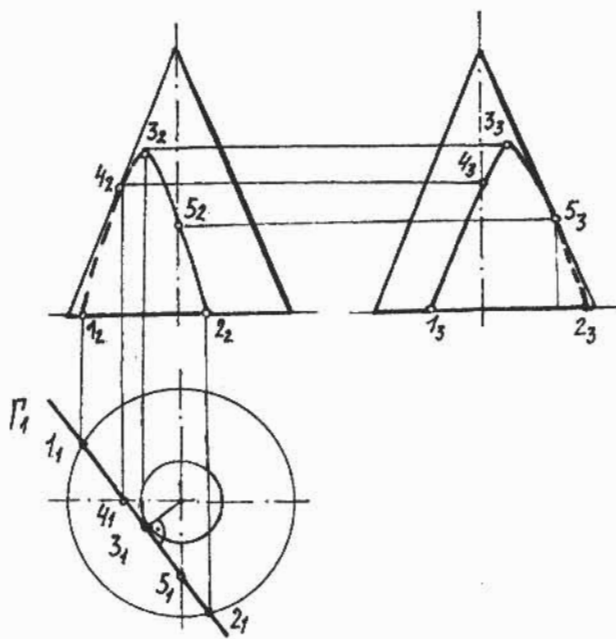


Рис. 7

Побудова гіперболи наведена на рис. 7. Площина $\Gamma(\Gamma_1) \perp \Pi_1$.
 Вершина гіперболи точка 3 (3_1) визначається на перетині перпендикуляра, проведеного з центра кола до площини $\Gamma(\Gamma_1)$. Точки 4 і 5 визначають межі видимості.

На рисунках 8 і 9 розглянуті приклади побудови конуса площиною загального положення. Для розв'язку задачі в цих прикладах виконується заміна площини загального положення в проєкціюючу методом заміни площин проєкцій аналогічно задачі, приведеній на рис. 3.

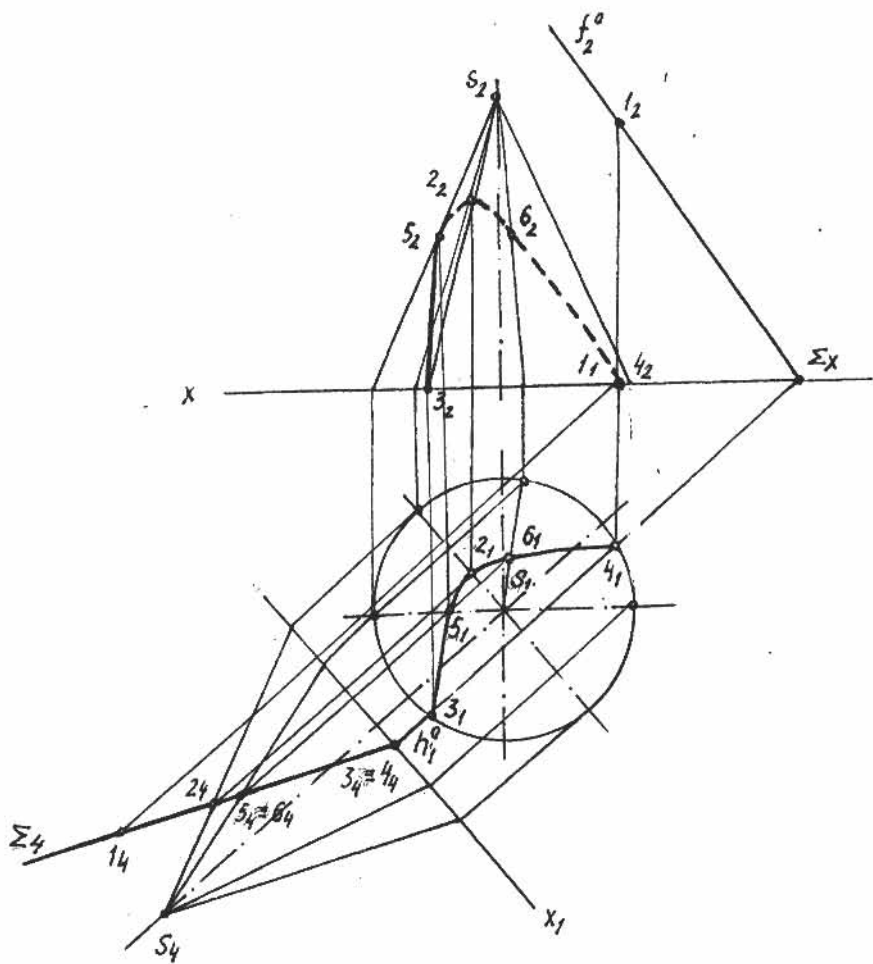


Рис. 9

Перетин сфери площиною

Лінія перетину сфери площиною – коло. На рис. 10 січна площина $\Delta (\Delta_2)$ – фронтально-проекціуюча.

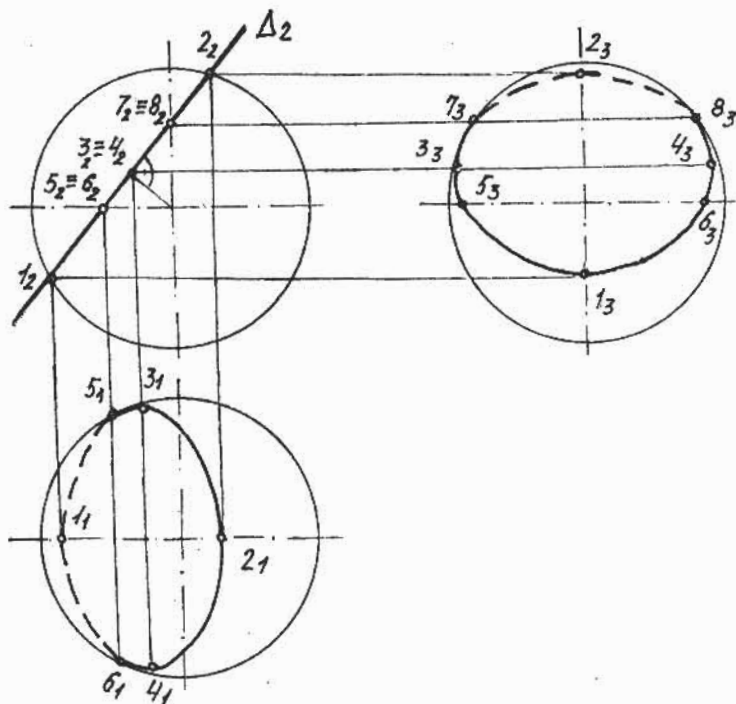


Рис. 10

Лінію перетину сфери площиною загального положення можна знайти двома способами.

Якщо січна площина загального положення, тоді коло проектується на площини проєкцій у вигляді еліпсів.

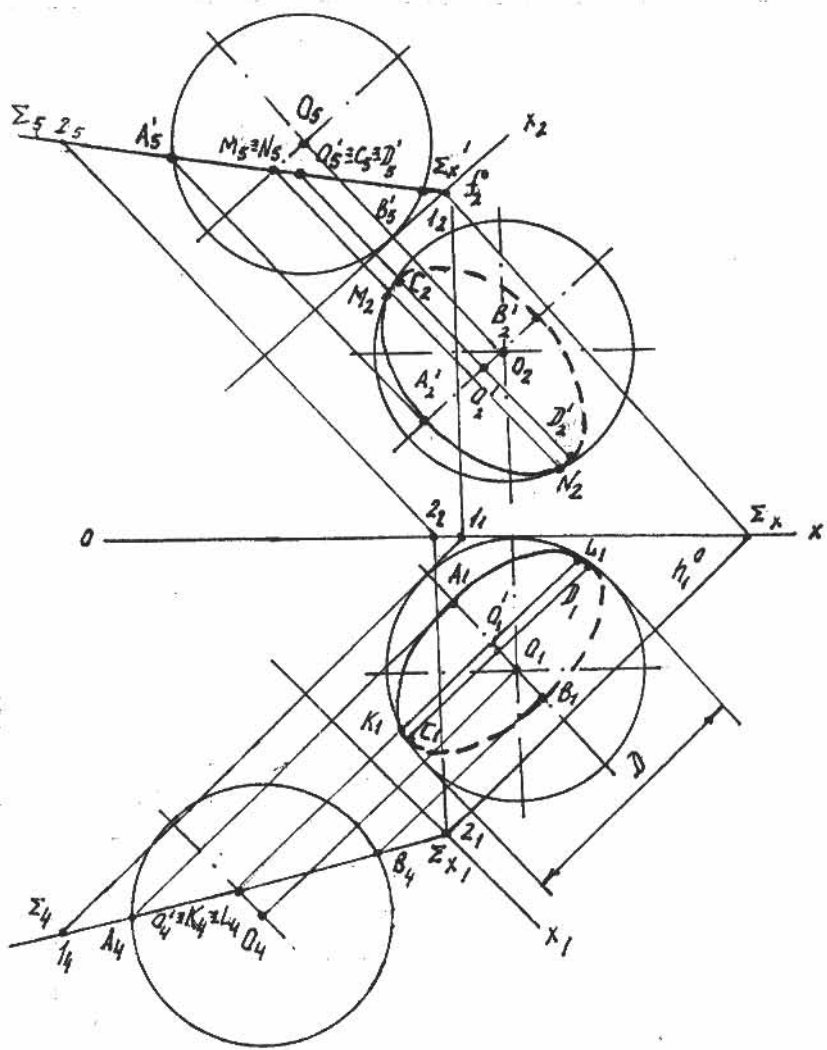


Рис. 11

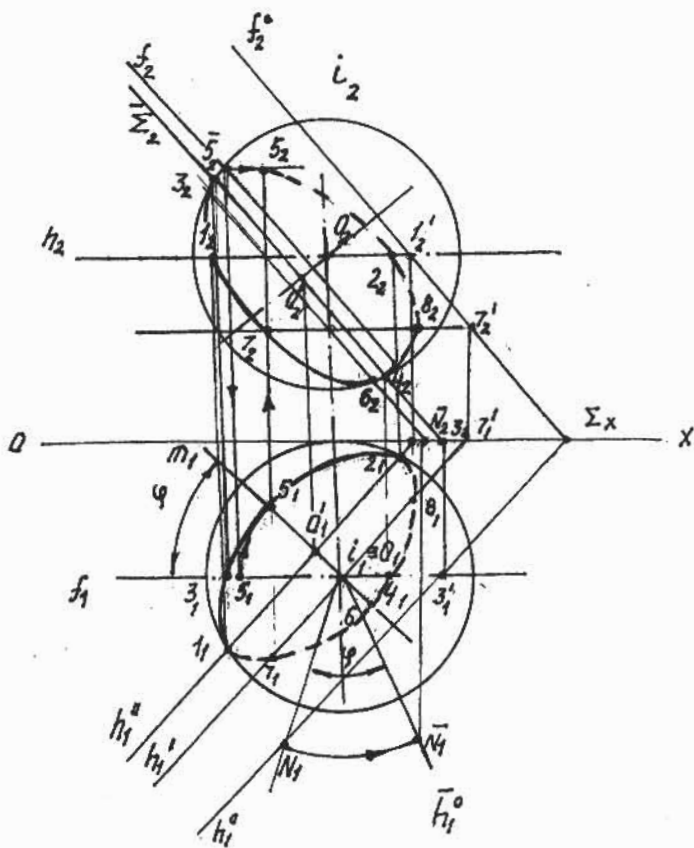


Рис. 12

I спосіб знаходження лінії перетину використовує метод заміни площин проекцій, який дає можливість перетворити площину загального положення в площину окремого положення.

Визначимо характерні точки на площині проекцій Π_4 (рис. 11). Беремо довільну точку l на нульовій фронталі і будуємо її проекцію l_4 . Вісь x_1 проводимо перпендикулярно до h_1° . Точка збігу Σ_x перейде в точку Σ_{x_1} . Слід-проекція Σ_4 пройде через точку l_4 і Σ_{x_1} . Будуємо центр сфери точку O_4 і проводимо проекцію сфери на площину проекцій Π_4 . Площина Σ_4 перетинається зі сферою в точках A_4 і B_4 , які визначають на Π_4 кінці малої осі еліпса - A_1 і B_1 , ця вісь розміститься вздовж лінії найбільшого нахилу відносно площини проекцій Π_1 і пройде через точку O_1 . З точки O_4 опустимо перпендикуляр на площину Σ_4 і визначимо центр перерізу O_4 і точки C_4 і D_4 - кінці другої осі еліпса в площині Π_1 . Відстань O_4O_4' на Π_4 проєкується в натуральну величину, тому відрізок O_1O_1' буде паралельним осі Ox_1 і збігатися з лінією найбільшого нахилу. Велика вісь C_4D_4 еліпса дорівнює діаметру перерізу - на туральна величина якого є відрізок A_4B_4 . Відрізок C_1D_1 дорівнює A_4B_4 і проходить через точку O_1' паралельно h_1° . Через центр O_4 проведемо проекцію екватора на Π_4 . Ця лінія в перетині з площиною Σ_4 визначить точки K_4 і L_4 , які називаються точками "видимості". Спроєкуємо ці точки на коло екватора в площині Π_1 . Будуємо еліпс на Π_1 за точками великої осі - C_1 і D_1 і точками малої осі A_1 і B_1 , а також точками видимості K_1 і L_1 .

Побудову еліпса в площині проекцій Π_2 проводимо аналогічно.

II спосіб розв'язку задачі на побудову лінії перерізу сфери площиною загального положення без використання методу заміни площин проекцій.

В цьому випадку, так як і в попередньому, проекції лінії перетину сфери площиною будуть еліпси.

Розглянемо побудову горизонтальної проекції еліпса. Еліпс будемо за двома осями (рис. 12).

Для побудови осей еліпса використовуємо метод обертання площини навколо проєктуючої прямої перпендикулярної до Π_1 і яка проходить через центр сфери.

Спочатку визначимо точки видимості еліпса, які лежать на екваторі. Горизонталь h перетинає екватор в точках 1 і 2. Спочатку знаходимо на Π_1 , а потім на Π_2 (на h_2). Мала вісь пройде на лінії найбільшого нахилу до Π_1 , яка перпендикулярна до h і проходить через центр O .

Межі видимості еліпса на Π_2 визначасмо за допомогою фронталі, яка лежить в меридіанальній площині. Одержуємо точки 3 і 4. Фронталь f (f_2) перетинає на Π_2 вісь обертання і (i_2) в точці $O'(O_2')$. Через цю точку пройде слід-проекція $\Sigma(\Sigma_2)$ проєктуючої площини в яку переміщується задана площина.

Другу точку N вибираємо довільно на h^0 і повертаємо на кут φ точку N , одержавши N_1 . (кут φ дорівнює куту між лініями m_1 (л.н.н.) і f_1). Будуємо N_2 . З'єднуємо O_2' і N_2 , одержуємо переміщене положення площини $\Sigma - \Sigma_2$. Σ_2 визначає точки 5_2 і 6_2 і відрізок $5_2 - 6_2$ визначає величину великої осі еліпсу. Будуємо горизонтальні проекції точок 5 і 6. Повертаємо точки 5 і 6 в початкове положення, яке збігається з лінією найбільшого нахилу – m . Будуємо їх фронтальну проекцію – 5_2 і 6_2 . На Π_1 відрізок $5_1 - 6_1$ ділимо навпіл і визначаємо центр O_1'' . Через точку O_1'' проводимо h_1'' і відкладаємо велику вісь еліпса ($5_2 - 6_2$).

Проміжні точки еліпса можна побудувати за допомогою площин паралельних Π_1 (наприклад Δ (Δ_2) дає точки 7 і 8). Фронтальну проекцію можна побудувати аналогічно, або за точками горизонтальної проекції.