УДК 004.925.8

СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНІ МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ЯК ЗАСОБИ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Вірченко Г.А., к.т.н.
Національний технічний університет України “КПІ”
Тел. (044) 406-82-43

***Анотація* – у статті розглянуто деякі питання застосування геометричного структурно-параметричного підходу для розв’язування оптимізаційних задач методами апроксимації.**

***Ключові слова* – автоматизоване проектування, алгоритм, апроксимація, геометричне моделювання, задача оптимізації, структурно-параметричний підхід.**

Постановка проблеми. Головне завдання проектування промислової продукції, зазвичай, полягає у визначенні таких її параметрів, що забезпечують найкращі значення заданих техніко-економічних характеристик.

При цьому в якості основних засобів досягнення поставленої мети доволі часто виступають різноманітні математичні методи оптимізації [1-3 та ін.].

Сучасне автоматизоване проектування у вирішенні прикладних задач спирається на певні програмні засоби.

Заслужену популярність світового рівня, завдяки вдалому поєднанню простоти, надійності в користуванні, потужності, гнучкості та високої ефективності опрацювання різноманітних даних, має, зокрема, пакет Microsoft Office Excel, який широко застосовується для обчислень за допомогою електронних таблиць.

На думку значної кількості експертів у сфері інформаційних технологій ця комп’ютерна програма дійсно відповідає своїй назві «Прекрасний».

Тому багато відомих систем автоматизованого проектування, наприклад, SolidWorks, CATIA, КОМПАС та ін., мають інтерфейс із Microsoft Office Excel для забезпечення, на підставі таблиць параметрів, варіантного конструювання. Для розв’язування задач оптимізації в цьому пакеті є потрібний модуль.

Однак досвід використання останнього у складі Microsoft Office Excel 2000 ... 2007 засвідчив наявність деяких вад щодо вирішення зазначених задач.

Аналіз досліджень і публікацій. Подана в роботі [4] загальна методологія структурно-параметричного формоутворення та наведені в [5] і [6] відповідно прийоми апроксимації поверхонь і засоби удосконалення геометричних алгоритмів дозволяють певним чином поліпшити якість виконання оптимізаційних розрахунків.

Формулювання цілей статті. Запропонувати для розв'язування задач оптимізації нову методику, що базується на структурно-параметричних прийомах апроксимації.

Основна частина. Кращому висвітленню подальшого матеріалу сприятиме розгляд тестового прикладу.

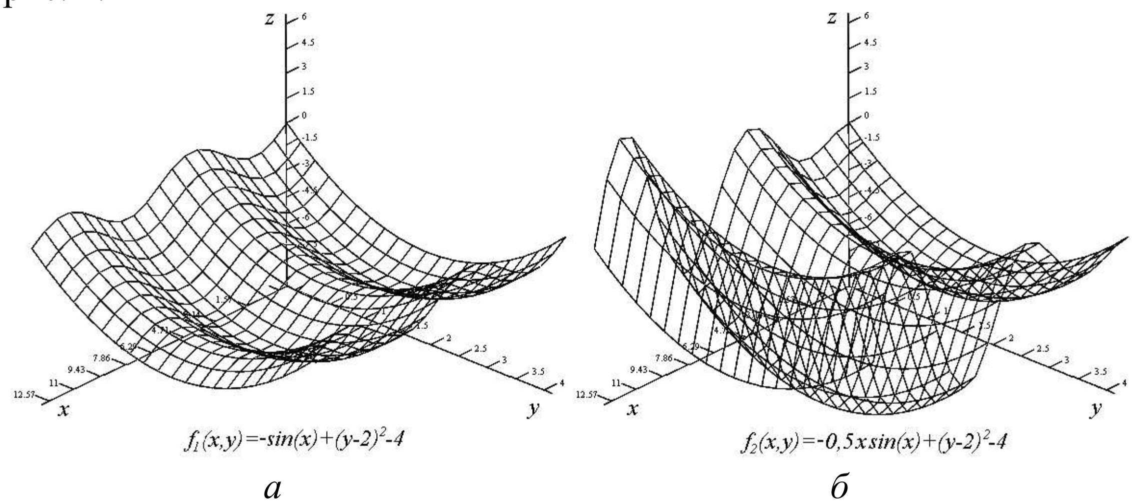
Нехай необхідно в декартовій прямокутній системі координат *Oxyz* визначити мінімальне значення двох цільових функцій

$$z_1 = f_1(x,y) = -\sin(x) + (y-2)^2 - 4 \text{ та}$$
$$z_2 = f_2(x,y) = -0{,}5x\sin(x) + (y-2)^2 - 4 \qquad (1)$$

з обмеженнями у вигляді

$$x \in [x_n, x_к] = [0; 4\pi], \quad y \in [y_n, y_к] = [0; 4]. \qquad (2)$$

Графіки досліджуваних виразів (1) на проміжках (2) показано на рис. 1.



а *б*

Рис. 1. Цільові функції оптимізації

Розв'язок наведеної задачі досить легко знайти аналітичним шляхом (за допомогою похідних).

Якісну наочну оцінку поставленого завдання можна провести й суто геометричними методами, наприклад, засобами кінематичного формоутворення.

У цьому разі для $z_1=f_1(x,y)$, розглядаючи $z=(y-2)^2-4$ як твірну, а $z=-\sin(x)$ – як напрямну, на підставі відомих графіків двох останніх залежностей, визначаємо точки мінімуму $(x_1, y_1)=(\pi/2, 2)$ і $(x_2, y_2)=$ $=(5\pi/2, 2)$, значення в яких однакове та дорівнює $z_1=-5$.

Для $z_2=f_2(x,y)$, у зв’язку зі зміною в напрямної $z=-0,5x\sin(x)$ величини амплітуди та розташування її екстремальних значень уздовж осі x, прогнозованими є також дві точки мінімуму з ординатами $y=2$, але тепер у випадку більшої абсциси матимемо глобальний мінімум (див. рис. 1).

Вирішення в Microsoft Office Excel розглянутого завдання для:

- $z_1=f_1(x,y)$ і початкової точки $(x_0, y_0)=(0; 0)$ дає лише один розв’язок $(x_1, y_1)=(1,571; 2)$, $z_1=-5$; а для $(x_0, y_0)=(6; 0)$ – тільки $(x_1, y_1)= =(7,854; 2)$, $z_1=-5$.
- $z_2=f_2(x,y)$ і початкової точки $(x_0, y_0)=(0; 0)$ визначає розв’язки $(x_1, y_1)=(0; 2)$, $z_2=-4$ та $(x_1, y_1)=(2,029; 2)$, $z_2=-4,91$ – відповідно для випадку застосування прямих та центральних різниць; а для $(x_0, y_0)= =(6; 0)$ – $(x_1, y_1)=(7,979; 2)$, $z_2=-7,958$.

Отже бачимо, що основними недоліками досліджуваного програмного та математичного забезпечення можна вважати:

- видачу тільки одного розв’язку при наявності декількох;
- залежність отримуваного оптимального значення від заданої початкової точки (яку правильно визначити, без попереднього аналізу, достатньо проблематично) та обраних методів обчислень.

Коротко зазначимо, що подібні вади існують і в інших широко відомих пакетах, зокрема, Mathcad Professional тощо.

Це обумовлено спільним застосуванням таких класичних прийомів оптимізації як метод Ньютона, спряжених градієнтів і т. п.

Сфера наукових розвідок автора полягає в узагальненні структурно-параметричного підходу до автоматизованого геометричного моделювання об’єктів і процесів машинобудування.

Ефективне вирішення зазначених питань без використання комп’ютерних засобів оптимізації є практично неможливим, що обумовлює потребу адаптації останніх до відповідної галузі вжитку.

Таким чином, крім подолання наведених вище недоліків програмних засобів бажано забезпечити:

- достатню стійкість отриманих оптимальних розв’язків при незначних відхиленнях значень змінних, тобто, для прикладу, таких величин як наявна точність виготовлення деталей та їх розміщення у складанних одиницях, різноманітні параметри технологічних процесів і т. д.;
- здатність визначати розв’язки згідно заданих найменших проміжків змінних, тобто таких величин як розміри деталей (що повинні бути кратні, наприклад, 1, 10 або, навіть, 100 мм), точність регулювання технологічних режимів (зокрема, в 5, 10 градусів температури або робочого тиску в 1, 10 Па) і т. п.;
- максимальну швидкодію та мінімальні потреби в комп’ютерній пам’яті тощо.

Перейдемо далі до безпосереднього викладення запропонованого методу виконання оптимізаційних розрахунків, що базується на поданих у [5, 6] прийомах структурно-параметричного підходу до геометричного моделювання.

Даний спосіб складається з наступних основних дій.

1. Задається цільова функція оптимізації, наприклад, у вигляді $z_2=f_2(x,y)$ та додатково до (2) потрібні обмеження $G(x,y)$ як сукупність певних рівнянь, нерівностей і т. п.

2. Визначаються для змінних їх найменші проміжки x_{min}, y_{min}. Нехай для випадку, що розглядається, це відповідно k_x=1% і k_y=2% довжини відрізків (2), тобто $x_{min}= k_x\,(x_к-x_п)$ та $y_{min}= k_y\,(y_к-y_п)$.

3. Задається точність δ для обчислення цільової функції та число N потрібних її мінімальних значень.

Тоді, якщо δ, тобто точність апроксимації, призводить до перевищення дозволеної максимальної кількості ділянок апроксимації уздовж змінних n_{xmax} або n_{ymax} (останні, із збільшенням розмірності оптимізаційної задачі, потрібно зменшувати для збереження швидкодії алгоритму), то додатково визначається первинна точність δ_0 згідно забезпечення умови $max((x_к-x_п)/n_{xmax},(y_к-y_п)/n_{ymax}) \le \delta_0 \le min(x_{min},y_{min})$.

Скажімо, в нашому разі, δ=0,001, n_{xmax}=200, n_{ymax}=100. Відтак можна прийняти δ_0=0,08. Нехай також N=10.

4. З точки з мінімальними значеннями змінних x та y методом ділення навпіл виконується послідовна апроксимація в області (2) дуг кривих $z_2=f_2(x,y=const)$ та $z_2=f_2(x=const,y)$ відрізками з перевіркою відхилень на діагоналях одержаних топологічних чотирикутників.

5. У процесі обчислень попереднього пункту заповнюється буфер отриманими значеннями змінних і цільової функції за зростанням величини останньої.

6. Після завершення пункту 4 виконується перевірка елементів буфера щодо дотримання обмежень $G(x,y)$. Даними, які успішно пройшли зазначене випробування, заповнюється вихідний масив, з кількістю компонентів N, що також упорядкований згідно збільшення значень цільової функції.

Таким чином, за допомогою поданого алгоритму, визначається потрібне число оптимальних розв’язків.

Дамо кілька докладніших пояснень стосовно запропонованого методу розрахунків.

По перше, структурний поділ відбору значень цільової функції на дві процедури – упорядкування та перевірки обмежень суттєво підвищує швидкодію обчислень, оскільки виключає невиправдану обробку неперспективних даних. Цьому сприяє також параметр N.

По друге, доволі важливим моментом є використання апроксимації як засобу «згладжування» цільової функції для покращення розглянутої вище стійкості одержуваних оптимальних розв'язків.

Так якщо на найменших проміжках змінних дотримано задану точність апроксимації цільової функції, то можна вважати, що значення останньої практично не змінюються при варіюванні у відповідних діапазонах вихідних параметрів. У випадку ж наявності на зазначених мінімальних проміжках суттєвих відхилень функції від апроксимуючого її відрізка величини останньої відкидаються як нестійкі.

По третє, застосування викладених у [6] теоретичних прийомів підвищення ефективності геометричних алгоритмів дає відповідні практичні результати.

Зокрема, у даному випадку, процес знаходження розв'язків для $z_2=f_2(x,y)$ у проміжках (2) на достатньо застарілому комп'ютері Intel Pentium 4 2003 року виготовлення для δ=0,001 та без обмежень на n_{xmax} і n_{ymax} триває приблизно 15 секунд, а з δ_0=0,08 – не більше ніж 0,015 секунди, тобто швидкодія зростає в 1000 разів. Це обумовлено зменшенням, після першої ітерації, області пошуку (2) до $x\in[7,75; 8,19]$, $y\in[1,63; 2,19]$.

Перевагою запропонованого способу оптимізації можна вважати не тільки знаходження глобального мінімуму, незалежно від початкової точки розрахунків, а й відсутність потреби обчислення похідних та здатність працювати з довільними цільовими функціями й обмеженнями.

Доцільним зауваженням вважатимемо також зазначення того факту, що алгоритм, викладений на прикладі тривимірного простору, достатньо легко поширюється на функції n змінних.

На завершення зазначимо, що в кожного методу оптимізації є свої переваги та недоліки, сфера найбільш ефективного застосування.

Тому раціональним можна вважати їх комплексне використання для забезпечення успішного досягнення поставлених цілей у конкретних умовах.

Висновки. Визначені в публікації напрямки удосконалення математичного та програмного забезпечення для вирішення задач оптимізації шляхом застосування прийомів структурно-параметричного геометричного моделювання потребують свого подальшого наукового дослідження.

Література

1. *Хог Э.* Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции: Пер. с англ. / Хог Э., Арора Я. – М.: Мир, 1983. – 478 с.

2. Введение в нелинейное программирование / Эльстер К.Х., Рейнгардт Р., Шойбле М., Донат Г. / Пер. с нем. Под ред. И.И. Еремина. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 264 с.
3. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс: Пер. с англ. / Банди Б. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
4. *Ванін В.В.* Визначення та основні положення структурно-параметричного геометричного моделювання / Ванін В.В., Вірченко Г.А. // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Вип. 23. – Харків: ХДУХТ, 2009. – С. 42-48.
5. Вірченко Г.А. Розрахунок перетинів довільних параметричних поверхонь / Вірченко Г.А. // Праці Тавр. держ. агротех. університету – Вип. 4, т. 41. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – С. 119-125.
6. *Вірченко Г.А.* Структурно-параметричний підхід як засіб удосконалення геометричних алгоритмів / Вірченко Г.А. // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Вип. 26. – Харків: ХДУХТ, 2010. – С. 81-84.

СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ КАК СРЕДСТВА РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Вирченко Г. А.

Аннотация

В статье рассмотрены некоторые вопросы применения геометрического структурно-параметрического подхода для решения оптимизационных задач методами аппроксимации.

STRUCTURAL-PARAMETRIC APPROXIMATION METHODS AS THE MEANS FOR SOLUTION OF OPTIMIZATION TASKS

G. Virchenko

Summary

This article describes the some solutions of the optimization tasks by geometrical approximation methods of the structurally-parametric approach.