

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
"КІЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

М Е Т О Д И Ч Н І      В К А З І В К И  
З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ  
"ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ"

Частина I

Затверджено  
на засіданні Вченої ради  
фізико-математичного факультету  
Протокол №2 від 21.02.2000 р.

Методичні вказівки з нарисної геометрії "Перетин поверхонь".  
Ч.І. /Укл. К.В.Сарнацька, Н.С.Двяченко, Г.Г.Допіра, О.О.Голова.-  
К: НТУУ "КПІ", 2000.- 16 с.

Укладачі: Катерина Василівна Сарнацька

Неллі Сергіївна Двяченко

Ганна Георгіївна Допіра

Ольга Олександрівна Голова

Відповідальний редактор В.В.Ванін

Рецензент

В.В.Перевертун

Лабораторія офсетного друку НТУУ "КПІ"  
03056, Київ-56, проспект Перемоги, 37.  
Зам. № 186. Тираж 100. Ум.др.арк. 1,0.  
Друк офсетний. Папір офсетний.

Основним методом, який використовується при побудові ліній перетину поверхонь, є метод допоміжних січних /метод посередників/. Цей метод полягає у тому, що обидві задачі поверхні перетинаються поверхнею-посередником, потім будуються перерізи кожної поверхні поверхнею-посередником, точки перетину побудованих перерізів будуть належати лінії перетину поверхонь /рис. I/.

Вищезгаданий метод допоміжних січних поверхонь вже застосовувався у попередніх розділах курсу при розв'язку різних задач на перетин /наприклад, при перетині двох площин, при визначенні точки перетину прямої з площею, при перетині поверхні з площею і, насамкінець, при перетині поверхні з прямою/.

У всіх випадках використовували допоміжні площини-посередники. Оскільки площа - окремий вид поверхні, то можна вважати, що цей метод використовували в найпростіших окремих випадках.

Призначення допоміжної січної площини було в тому, щоб звести кожну з чотирьох побудов до задачі на перетин двох ліній, що лежать в одній допоміжній площині. Тепер допоміжна поверхня має те ж саме призначення, а саме: звести задачу про перетин двох поверхонь до простішої задачі перетину двох будь-яких ліній, які розташовані на одній допоміжній поверхні.

На практиці при побудові ліній перетину поверхонь частіше за все використовують у вигляді допоміжних поверхонь або площин /окремого чи загального положення/, або сфери.

Можливий вибір посередника обумовлений формою перерізів, які отримуємо при перетині кожної з поверхонь поверхнею-посередником /вони повинні бути найпростішими/.

Площини окремого положення використовуються як посередники, у тих випадках, якщо допоміжні паралельні площини при перетині з поверхнями утворюють або прямі лінії, або кола. Це можливо,

якщо перетинаються:

- дві поверхні обертання;
- поверхня обертання і многогранник;
- два многогранника, один з яких є проекціюча поверхня /наприклад, пряма призма/.

Площини загального положення використовуються як посередники тоді, коли перетинаються конічні, циліндричні, гранні поверхні довільного вигляду і положення. Площини-посередники вибираються таким чином, щоб вони перетинали поверхні за прямолінійними твірними.

Сфери використовуються як допоміжні січні поверхні у тих випадках, якщо обидві поверхні, що перетинаються, є поверхнями обертання та їх осі розташовані в одній площині /мають спільну площину симетрії/.

У першій частині методичних вказівок розглядається методика та приклади побудови ліній перетину поверхонь обертання та гранних поверхонь з використанням площ-посередників площин окремого положення та допоміжних січних сфер.

## ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

При побудові лінії перетину 2-х поверхонь використовується метод посередників. Посередник вибирається таким чином, щоб він перетинає задані поверхні за найпростішими лініями, наприклад: конус чи циліндр за колам чи твірним .

Як посередники, можуть бути використані:

1. Площини окремого положення.
2. Сферичні посередники.
3. Площини загального положення.
4. Циліндричні і конічні поверхні.

Розглянемо приклад розв'язку такої задачі на просторовій моделі /рис.І/.

Дано: дві поверхні обертання.

Визначити: лінію перетину цих поверхонь

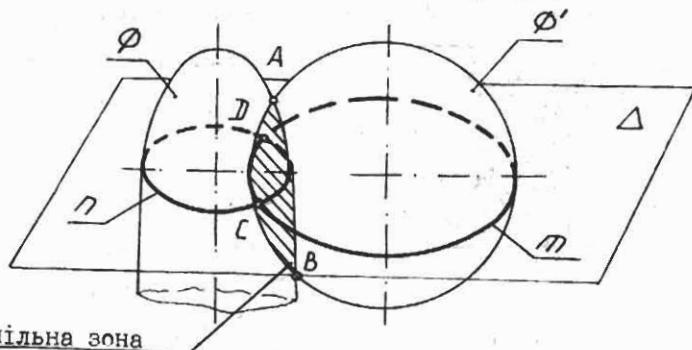


Рис.І

Спочатку ми повинні побудувати характерні точки лінії перетину даних поверхонь, так як вони не потребують допоміжних побудов. Такими точками можуть бути:

1. Точки, які лежать на перетині обрисів поверхонь.
2. Більші і менші точки.
3. Вищі і нижчі точки.
4. Ліві і праві точки.

Якщо характерних точок буде недостатньо, тоді можна приступити до побудови проміжних точок. На просторовій моделі точки A і B - характерні точки, а точки C і D - проміжні. Для того, щоб одержати точки C і D, задані поверхні перетинаємо горизонтальною площину рівня  $\Delta$ . Площина  $\Delta$  розрізає поверхню  $\Phi$  по колу  $n$ , а поверхню  $\Phi'$  по колу  $m$ . Так як два кола знаходяться в даній площині  $\Delta$ , то вони мають спільні точки перетину C і D. Таким чином, точки C і D належать і одній поверхні, і другій, одночасно, а тому і належать лінії перетину заданих поверхонь.

### I. ПОСЕРЕДНИКИ-ПЛОШИНІ ОКРЕМОГО ПОЛОЖЕННЯ

Розглянемо конкретно приклади перетину двох поверхонь, де посередниками будуть площини окремого положення.

ПРИКЛАД I: Перетинаються поверхні циліндра і півсфери.

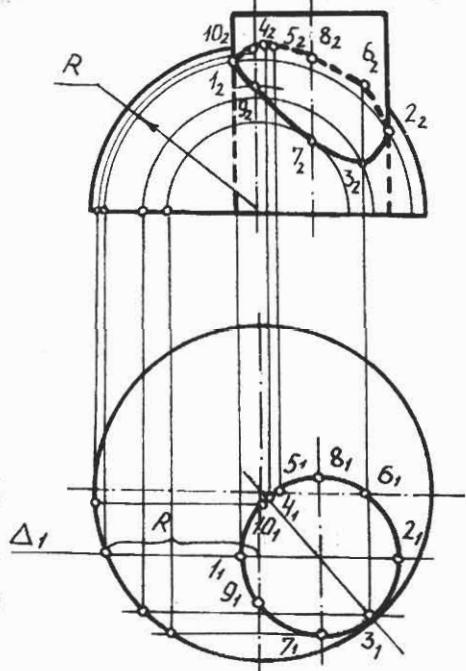
Визначити лінію перетину 2-х поверхонь. В даному прикладі

/рис.2/ доцільно використовувати посередники - фронтальні площини рівня; так як вони розтинають сферу по колам, а циліндр по твірним.

Визначимо характерні точки.

Це точки 1 і 2 - границі видимості для фронтальної проекції лінії перетину, так як вони належать обрисовим твірним циліндра.

Точки 3 і 4 - сама низька і сама висока точки. Точки 5 і 6 - лежать на головному меридіані сфери і в цих точках розри-



вастєся головний меридіан. Точки 7 і 8 - сама близька і сама віддалена точки лінії перетину. Точки 9 і 10 - для фронтальної проекції лінії перетину особливого значення не мають, але дозволяють побудувати характерні точки в  $\Pi_3$ , у разі необхідності.

Визначимо точки 1 і 2. Вони лежать в площині  $\Delta$ , яка розрізає сферу по колу радіуса  $R$ , а циліндр - по обрисовим твірним. Перетин цього кола з обрисовими твірними циліндра дає точки 1 і 2. Далі розв'язуємо аналогічно: через кожну вказану точку проводимо допоміжну площину-посередник, яка буде паралельна  $\Pi_2$  і кожна з цих площин розріже сферу по колу, а циліндр - по твірній. Перетин кожного кола із своєю твірною дасть шукану точку. Одержані точки з'єднуємо в тій же послідовності, що й на  $\Pi_1$ , з врахуванням видимості.

Частини: 1-9-7-3-2 - видимі, частини 2-6-8-5-4-10-1 - невидимі.

В даному прикладі використовується те, що положення однієї проекції точок шуканої лінії перетину /в  $\Pi_1$ / відомі. Це дає можливість побудувати легко точки другої проекції /в  $\Pi_2$ /, за допомогою

площин-посередників, які паралельні  $\Pi_2$ .

#### ПРИКЛАД 2:

Перетинаються два тіла обертання.

Побудувати лінію перетину заданих тіл /рис.3/.

В даному прикладі за допоміжні січні площини зручно використовувати горизонтальні площини рівня, так як вони розріжують задані

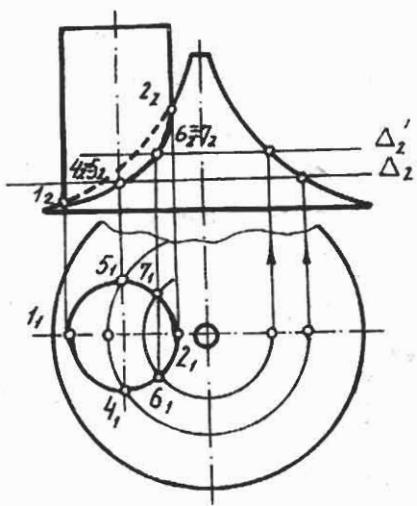


Рис.3

поверхні по колам. Точки  $1_2$  лежать на перетині обрисових твірних в  $\Pi_2$  і є характерними точками.

Інші точки /3,4,5,6/ - проміжні, і визначаються за допомогою допоміжних перерізів горизонтальними площинами  $\Delta$  і  $\Delta'$ . В  $\Pi_1$  всі точки, які належать лінії перетину, лежать на колі основи циліндра, так як він займає проектуюче положення відносно  $\Pi_1$ .

ПРИКЛАД 3. Перетинаються поверхня тора з поверхнею циліндра /причому циліндр займає проектуюче положення відносно  $\Pi_2$ / . Побудувати лінію перетину заданих поверхонь /рис.4/.

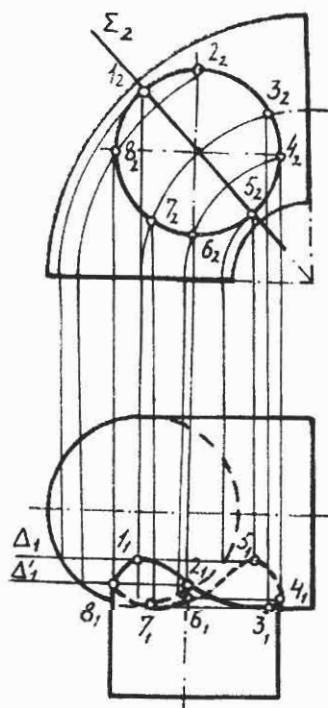


Рис.4

Побудувати лінію перетину заданих поверхонь /рис.5/. Цю задачу зручно розв'язувати методом повних перерізів. Через кожну грань призми треба провести січну площину. Так, площа  $\Sigma (\Sigma_2)$  паралельна  $\Pi_1$ , розтинає конус по

В даному прикладі зручно використати горизонтальні площини рівня, так як вони розрізають циліндр вздовж твірних, а тор по колам. Перетин цих ліній дає шукані точки. В даному прикладі точки 4 і 8-точки границі видимості в  $\Pi_1$  для лінії перетину. Після побудови точок в  $\Pi_1$  з'єднуємо їх з врахуванням видимості в тій же послідовності, що і в  $\Pi_2$ .

Частини: 8-1-2-3 видимі.

Частини: 3-4-5-6-7-8 невидимі.

ПРИКЛАД 4. Перетинаються прямий круговий конус, вісь якого перпендикулярна до  $\Pi_1$ , і тригранна призма, ребра якої перпендикулярні до  $\Pi_2$ .

Побудувати лінію перетину за-

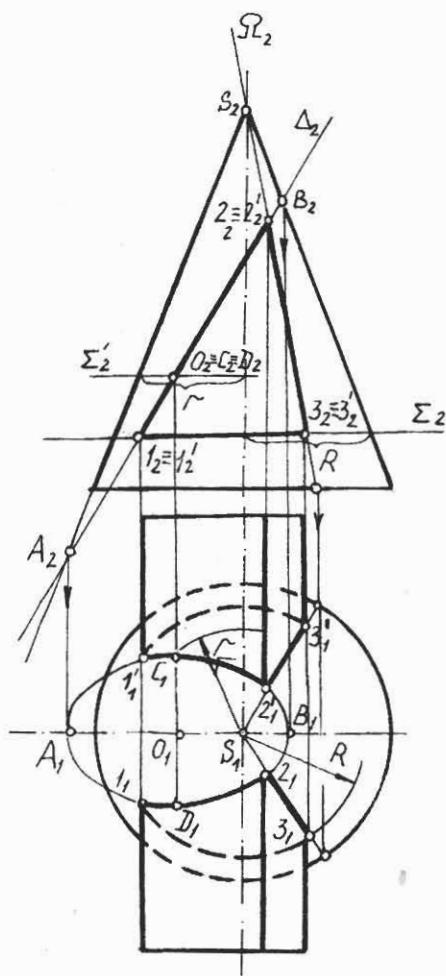


Рис.5

## ІІ. ВИЗНАЧЕННЯ ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ДОПОМІЖНИХ СФЕРИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Сфериці посередники використовуються для поверхонь обертання і для поверхонь, які мають перерізи у вигляді кола.

Спосіб базується на теоремі: дві співсъюзові поверхні обертання перетинаються по колам, що проходять через точки перетину меридіанів (рис.6,7,8).

коло радіуса  $R$ ; площа-  
на  $\Omega(\Omega_2)\Pi_2$  розтинає ко-  
нус по прямим, так як вона  
проходить через вершину  $S$ .  
Площина  $\Delta(\Delta_2)\Pi_2$  розтинає  
конус по еліпсу. Для побу-  
дови еліпса необхідно по-  
будувати велику  $AB$  і малу  
 $CD$  осі еліпса. Перетин  
еліпса з колом дасть точ-  
ку зламу I. Перетин кола  
з прямими дасть точку зла-  
му 3, і перетин прямих з  
еліпсом дасть точку 2.

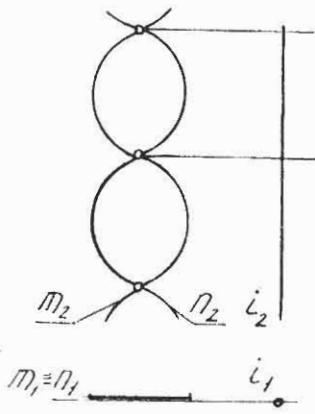


Рис.6

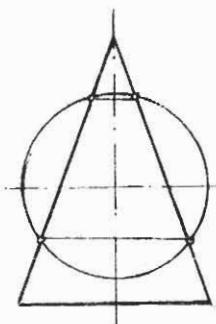


Рис.7

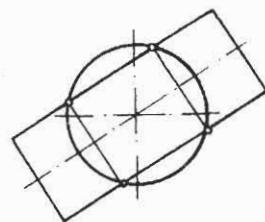


Рис.8

Сферичні посередники мають такі переваги:

1. Дуже просто будуються проекції сфери.
2. Сферична поверхня має безліч осей і площин симетрії.
3. Сфера перетинається з співосьовою поверхнею обертання по колу.

Існують 2 способи використання сфер-посередників:

1. Способ концентричних сфер.
2. Способ ексцентричних сфер.

#### СПОСІБ КОНЦЕНТРИЧНИХ СФЕР

Необхідні умови використання концентричних сфер:

1. Задані поверхні повинні бути поверхнями обертання.
2. Оси заданих поверхонь повинні перетинатися.
3. Оси заданих поверхонь повинні бути паралельні площинам проекцій.

**ЗАДАЧА I.** Знайти лінію перетину двох поверхонь обертання /двох циліндрів/ (рис.9).

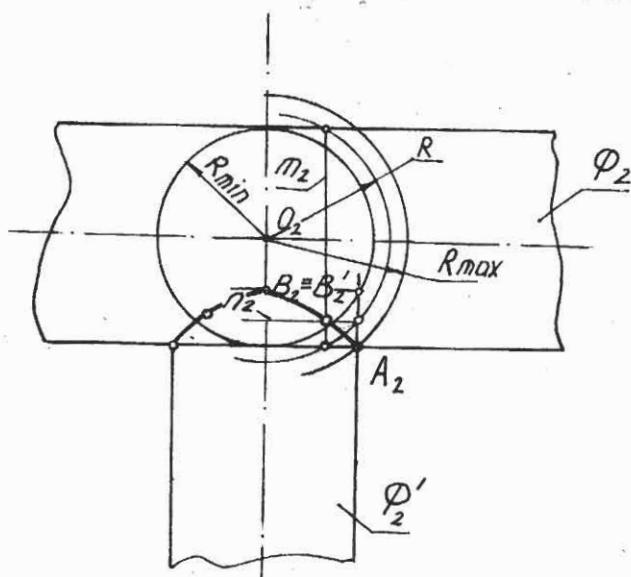


Рис.9

План розв'язку задачі:

1. Визначаємо центр сфер-посередників, як точку перетину осей обертання.

2. Визначаємо мінімальний радіус сфери-посередника, для цього з точки  $/O_2/$  проводимо перпендикуляр до твірної циліндра  $\Phi(\Phi_2)$ .

3. Визначаємо максимальний радіус сферичного посередника, який дорівнює відстані  $A_2O_2(A_2O_2)$ , де  $A_2$  – точка перетину обрисових твірних.

4. Радіус проміжної сфери  $R_{min} < R < R_{max}$ .

5. Розглянемо порядок побудови точок перетину:

5.1. З точки перетину осей як із центра проводимо сферу.

5.2. Визначаємо лінії перетину ( $m \cap n$ ) сфери-посередника з кожною із заданих поверхонь.

5.3. Знаходимо точки перетину одержаних ліній ( $m \cap n = B \equiv B'$ ).

**ЗАДАЧА 2 .** Знайти лінію перетину двох поверхонь обертання / двох конусів / (рис.10).

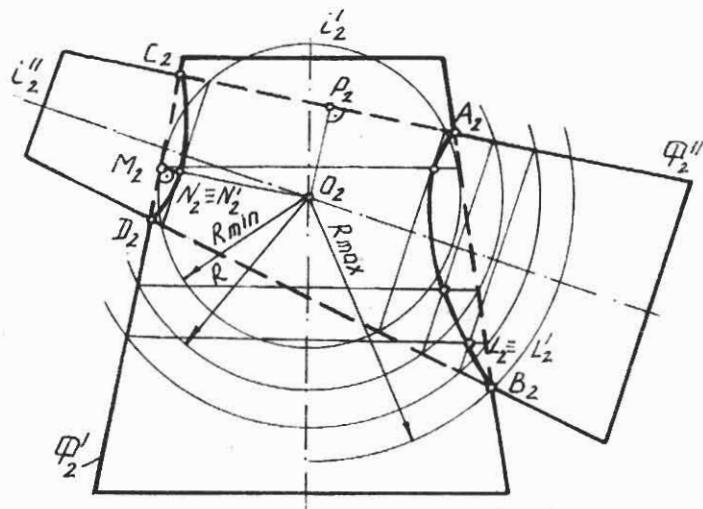


Рис.10

1. Із точки перетину осей конусів –  $O_2$ , центра сфер, проводимо дві нормалі на твірні конусів. Величину більшої нормалі беремо за  $R_{min}$ .

2. Відстань від точки  $O_2$  до точки  $B_2$  визначає  $R_{max}$ .

3. Радіус проміжних сфер  $R_{min} < R < R_{max}$ .

#### СПОСІБ ЕКСЦЕНТРИЧНИХ СФЕР

Ексцентричні сфери використовуюмо для визначення лінії перетину поверхонь, які мають у перерізі кола. Ці поверхні повинні мати спільну площину симетрії, тобто осі поверхонь повинні лежати в одній площині.

ПРИКЛАД I. Знайти лінію перетину зрізаного конуса з частиною тора (две поверхні є поверхнями обертання).

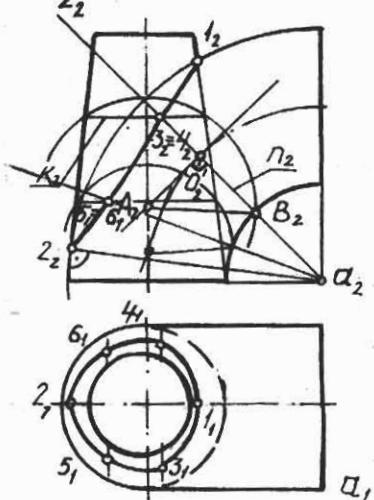


Рис.II

Спочатку визначаємо точки перетину обрисових твірних I і 2. Далі знаходимо проміжні точки, використовуючи, як посередники, допоміжні сфери. Розглянемо побудову точок 3 і 4 (рис.II).

- I. Через вісь тора проводимо довільну площину  $\Sigma (\Sigma_2)$ .

2. Позначаємо центр перерізу допоміжної сфери, як точку перетину площини  $\Sigma$  з основним колом кільця тора ( $O'$ ).
3. Знаходимо центр допоміжної сфери на осі конуса -  $A'$ , як точку перетину перпендикуляра, проведеного з точки  $O'$  до площини  $\Sigma$ .

4. Радіус допоміжної сфери дорівнює відрізку  $AB$ . Проводимо допоміжну сферу заданим радіусом.

5. Допоміжна сфера перетинає конус по колу  $K$  і частину тора по колу  $N$ . Взаємний перетин двох кіл дасть точки 3 і 4. Горизонтальна проекція цих точок знаходиться з умови належності точок поверхні конуса.

6. Таким чином знаходимо інші точки лінії перетину /5, 6/.

7. З'єднуємо побудовані точки лінії перетину.

ПРИКЛАД 2. Знайти лінію перетину кругового циліндра і похилого зрізаного конуса з колом в основі (одна поверхня є поверхнею обертання) (рис.I2).

Спочатку знаходимо точки перетину обрисових твірних поверхонь - I і 2. Далі знаходимо проміжні точки, використовуючи, як посередники, допоміжні сфери. Розглянемо побудови точок 3 і 4.

I. Проводимо площину рівня  $\Delta (\Delta_2)$ , яка перетинає конус по колу, з центром  $O'$  на осі конуса.

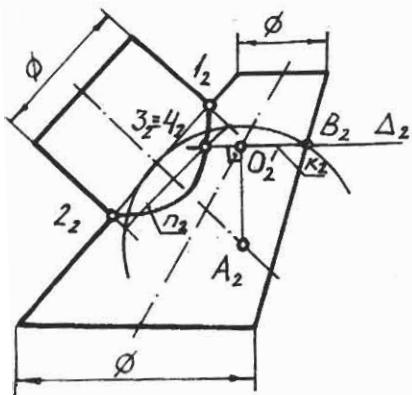


Рис.12

точки лінії перетину.

5. З'єднуємо побудовані точки лінії перетину.

2. Знаходимо центр допоміжної сфери  $A$  на осі циліндра, як точку перетину перпендикуляра, проведеноого через центр  $O'$  до площини  $\Delta$ , з віссю циліндра.

3. Проводимо допоміжну сферу радіуса  $AB$ , яка перетинає конус по колу  $K$ , а циліндр - по колу  $D$ . Взаємний перетин цих кіл визначає точки  $3_2 = 4_2$  лінії перетину.

4. Аналогічно знаходимо інші

### ОКРЕМІ ВИПАДКИ

**ТЕОРЕМА I:** Парність площинних перерізів.

Якщо дві поверхні другого порядку перетинаються по одній площинній кривій, то вони перетинаються ще по одній кривій, яка теж буде площею.

Конус і циліндр на рис.13 мають спільне коло  $K$ . Другою кривою буде площа крива еліпс  $e$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Якщо дві поверхні другого порядку мають дотик у двох точках, тоді лінія їх перетину розпадається на дві криві другого порядку, площини яких проходять через пряму, яка з'єднує точки дотику.

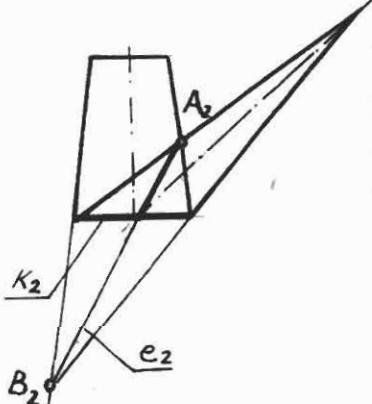


Рис.13

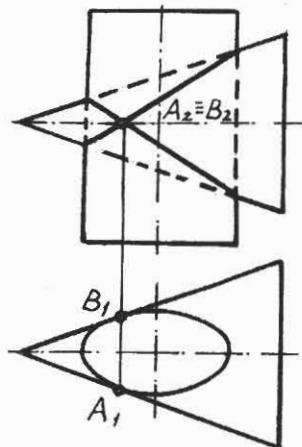


Рис.І4

**ТЕОРЕМА 3.** Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої поверхні другого порядку чи вписані в неї, то лінія їх перетину розпадається на дві криві другого порядку, площини яких проходять через пряму, яка з'єднує точки перетину лінії дотику (теорема Монжа).

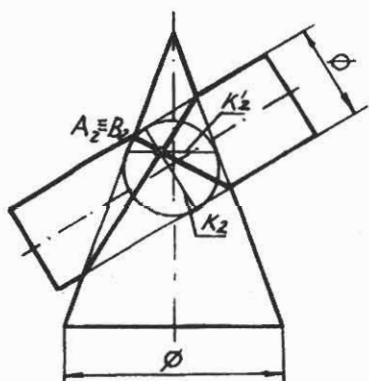


Рис.І5

На рис.І4 показаний перетин двох поверхонь другого порядку: конічної та циліндричної.

Ці поверхні мають 2 спільні точки:  $A$  і  $B$ , тому згідно теореми 2 вони перетинаються по двох плоскіх кривих другого порядку, які проходять через пряму  $AB$ .

На рис.І5 показаний перетин поверхонь обертання 2-го порядку /циліндра і конуса/. Допоміжна сфера дотикається до циліндра по колу  $K'$ , а до конуса по колу  $K$ . Взаємний перетин цих кіл визначають точки перетину  $A$  і  $B$ . Через пряму  $A$  і  $B$  проходять два плоскіх перерізи.