

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

КОРОТКИЙ КУРС ЛЕКЦІЙ
З ІНЖЕНЕРНОЇ ГРАФІКИ

Навчальний посібник
для студентів немеханічних спеціальностей

Київ — 2013

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”**

**КОРОТКИЙ КУРС ЛЕКЦІЙ
З ІНЖЕНЕРНОЇ ГРАФІКИ**

**Навчальний посібник
для студентів немеханічних спеціальностей**

Рекомендовано
Вченою радою ФМФ
19.11.2013 протокол № 5

Київ — 2013

Ванін В.В., Білицька Н.В., Гетьман О.Г., Міхлевська Н.В. Короткий курс лекцій з інженерної графіки для студентів немеханічних спеціальностей.— К.: НТУУ “КПІ”, 2013. — 44 с.

Відповідальний редактор: Голова О.О.

Рецензент: Гнітецька Г.О.

ЗМІСТ

Тема 1. Проекціювання точки та прямої	6
<i>Проекціювання точки</i>	6
<i>Проекціювання прямої</i>	7
<i>Перетворення прямої загального положення в пряму окремого положення методом заміни площин проекцій</i>	9
<i>Взаємне розташування двох прямих</i>	11
Питання та завдання для самоперевірки	11
Тема 2. Площина	12
<i>Точки та прямі в площині. Умови належності</i>	12
<i>Площини загального та окремого положення</i>	13
<i>Перетворення площини методом заміни площин проекцій</i>	14
<i>Проекціювання кола</i>	15
Питання та завдання для самоперевірки	16
Тема 3. Поверхні	17
Питання та завдання для самоперевірки	20
Тема 4. Аксонометрія	21
<i>Прямокутна ізометрія</i>	22
<i>Прямокутна диметрія</i>	23
<i>Косокутна фронтальна ізометрія</i>	25
<i>Алгоритм побудови аксонометрії деталі</i>	26
Питання та завдання для самоперевірки	27
Тема 5. Переріз поверхонь площинами. Розгортки поверхонь	28
<i>Перетин поверхні з площиною</i>	28
<i>Перетин гранної поверхні з площиною</i>	28
<i>Перетин поверхні циліндра з площиною</i>	29
<i>Перетин поверхні конуса з площиною</i>	30
<i>Перетин сфери з площиною</i>	31
<i>Розгортки поверхонь</i>	32
Питання та завдання для самоперевірки	33
Тема 6. Перетин поверхонь площинами. Подвійне проникання	34
<i>Одинарне проникання</i>	34
<i>Зображення геометричних тіл складної форми</i>	36
<i>Перетин поверхонь площинами. Подвійне проникання</i>	36
Питання та завдання для самоперевірки	37
Тема 7. Перетин поверхонь	38
<i>Побудова ліній перетину поверхонь за допомогою посередників-площин окремого положення</i>	40
<i>Побудова ліній перетину поверхонь за допомогою сферичних посередників</i>	41
<i>Окремі випадки</i>	43
Питання та завдання для самоперевірки	43
ЛІТЕРАТУРА	44

Цей навчальний посібник призначений для студентів, які вивчають курс нарисної геометрії за скороченою програмою.

Нарисна геометрія належить до дисциплін, що складають основу інженерної освіти. У цьому курсі вивчають методи зображень просторових форм на площині та способи графічного розв'язання позиційних та метричних задач за плоскими зображеннями об'єктів. Крім того, вивчення нарисної геометрії сприяє розвитку просторового уявлення, яке є необхідним для творчої діяльності будь-якого інженера. Тому засвоєння основ нарисної геометрії студентами має велике значення для їх наступної інженерної діяльності.

Посібник складений з урахуванням методичних посібників кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки НТУУ “КПІ”: “Навчальні завдання з нарисної геометрії”./Уклад. О.М.Крот, Л.В.Петіна, М.С.Гумен; “Навчальні завдання з інженерної графіки” /Уклад. М.Д.Бевз, В.В.Ванін, Н.К.Віткуп; “Методичні вказівки і контрольні завдання з курсів “Нарисна геометрія” та “Інженерна графіка” /Уклад. Н.К.Віткуп, Н.А.Парахіна, Л.Д.Чорнощоківа, а також з урахуванням посібника “Інженерна графіка” авторів В.В.Ваніна, В.В.Перевертун, Т.М.Надкерничної та ін.

Вивчення курсу здійснюється згідно з робочою програмою дисципліни. Для полегшення засвоєння матеріалу з кожної теми в скороченому вигляді надається теоретичний матеріал, необхідний для розв'язання практичних задач.

Передбачається, що після кожної лекції студент самостійно виконує прості завдання (*Домашні завдання*) з теми, контролюючи засвоєння матеріалу, а в аудиторії на практичних заняттях під наглядом викладача розв'язує основні задачі (*Аудиторні завдання*) за навчальним посібником *Ванін В.В., Білицька Н.В., Гетьман О.Г., Міхлевська Н.В. Навчальні завдання з нарисної геометрії та інженерної графіки для програмованого навчання студентів немеханічних спеціальностей*.

Для закріплення засвоєного матеріалу студенти самостійно виконують розрахунково-графічну роботу.

У курсі прийняті такі позначення та умовності:

- точки позначають великими літерами латинського алфавіту A, B, C, \dots , а також цифрами $1, 2, 3, \dots$;
- прямі та криві лінії — малими літерами латинського алфавіту a, b, c, \dots ;
- площини — великими літерами грецького алфавіту $\Pi, \Delta, \Theta, \Sigma, \dots$;

— кути — малими літерами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Будемо позначати α — кут нахилу прямої та площини до горизонтальної площини проєкцій Π_1 ; β — кут нахилу прямої та площини до фронтальної площини проєкцій Π_2 ; γ — кут нахилу прямої та площини до профільної площини проєкцій Π_3 . Інші кути позначають $\phi, \psi, \delta, \dots$

Проєкції точок, ліній та площин позначають такими ж літерами, як і самі об'єкти, але з індексами площин проєкцій, на яких побудоване зображення $A_1, B_1, C_1, \dots; A_2, B_2, C_2, \dots; A_3, B_3, C_3, \dots$

Для відображення співвідношення між геометричними об'єктами застосовуються такі символи:

\parallel — паралельність;

\cap — перетин;

\cup — дотик;

$\circ/-$ — мимобіжність;

\perp — перпендикулярність;

\cup — з'єднання точок;

Приклад умовного запису: $K = l \cap \Delta$.

Запис означає, що точка K є точкою перетину прямої l з площиною Δ .

\square — прямий кут;

\in — належність точки до іншого об'єкту;

\subset — належність решти елементів (ліній,...) до іншого об'єкту;

$=$ — результат дії;

$=$ — збіг геометричних об'єктів і проєкцій.

Тема 1. Проекціювання точки та прямої

Основні теоретичні відомості Проекціювання точки

Припускаємо, що площини проєкцій суміщені з координатними. Зображення точки виконується за її визначником. **Визначник** точки, що розташована в просторі, — координати x, y, z .

Умовний запис визначника точки A : $A(x, y, z)$. Наприклад, точка A має координати $x = 20$ мм, $y = 25$ мм, $z = 30$ мм. Її визначник: $A(20, 25, 30)$.

Проекцією точки називається точка перетину проєкціюючого променя з площиною проєкцій. Плоский рисунок одержують суміщенням горизонтальної Π_1 та профільної Π_3 площин проєкцій з фронтальною Π_2 площиною проєкцій за допомогою обертання навколо ліній їх перетину, які називають осями проєкцій.

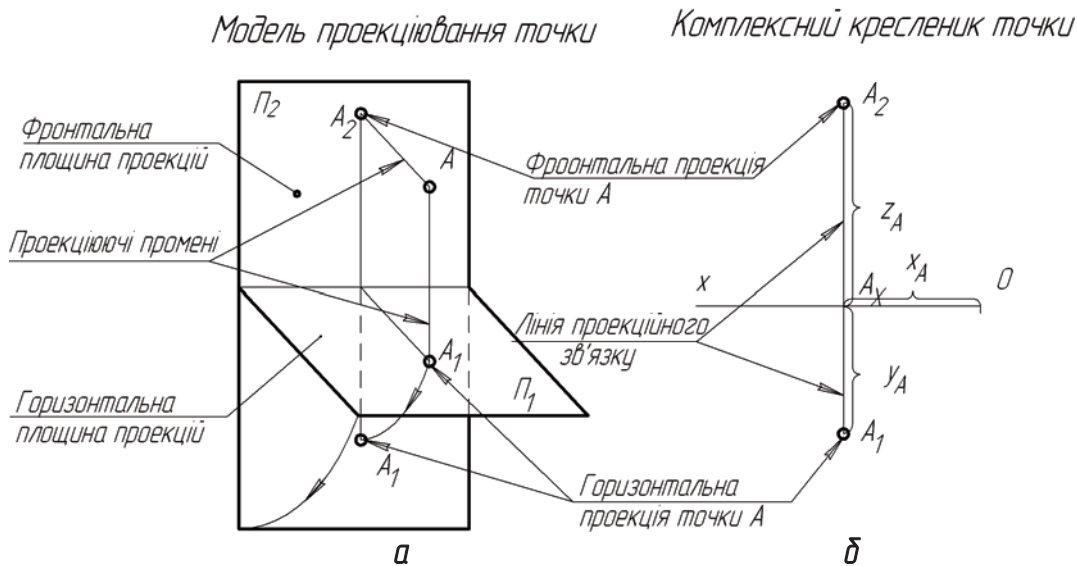


Рис. 1.

Комплексним креслеником точки називається сукупність проєкцій точки, які з'єднані лініями проєкційного зв'язку. Лінія проєкційного зв'язку завжди перпендикулярна до осі проєкцій, що розділяє площини проєкцій, на яких побудовані зображення.

Для побудови кресленика точки A за її визначником (рис.1 б) фіксуємо значення x_A вздовж осі x та проводимо вертикальну лінію зв'язку, на якій відкладаємо догори z_A , а донизу y_A .

Результатом читання комплексного кресленика є знаходження графічного визначника об'єкта та його метричних і позиційних характеристик. Визначником точки на рисунку є сукупність двох проєкцій точки $A(A_1, A_2)$, або $A(A_2, A_3)$. Кожна проєкція точки визначається двома координатами: $A_1(x_A, y_A)$, $A_2(x_A, z_A)$, $A_3(y_A, z_A)$, а будь-які дві проєкції надають інформацію про всі три координати.

На рис. 2 наведені приклади читання рисунків точок, що належать простору, площині або осі проєкцій.

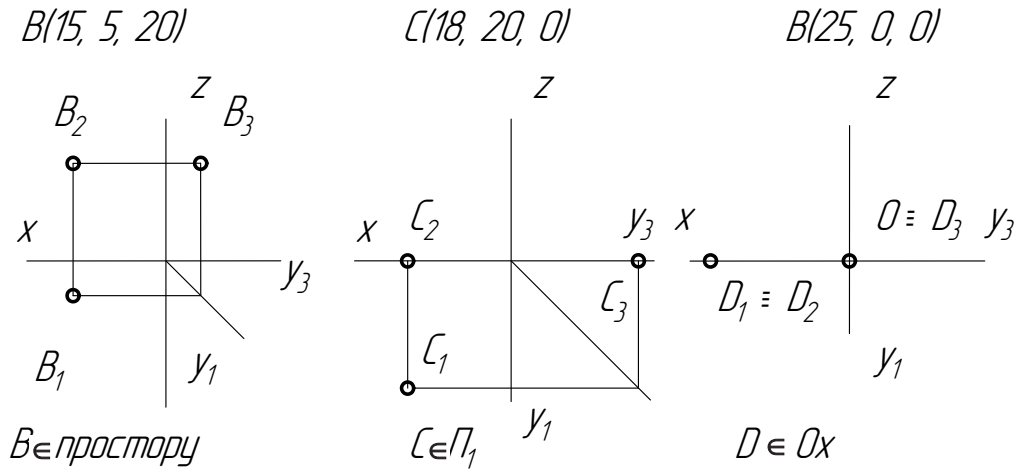


Рис. 2

Проекціювання прямої

Пряма задається у просторі променем або відрізком. **Визначником** прямої у просторі є дві точки. Умовний запис визначника прямої: $AB(A, B)$. На комплексному кресленнику пряма може бути визначена таким чином: $AB(A_1B_1, A_2B_2)$, або $l(l_1, l_2)$ (рис. 3).

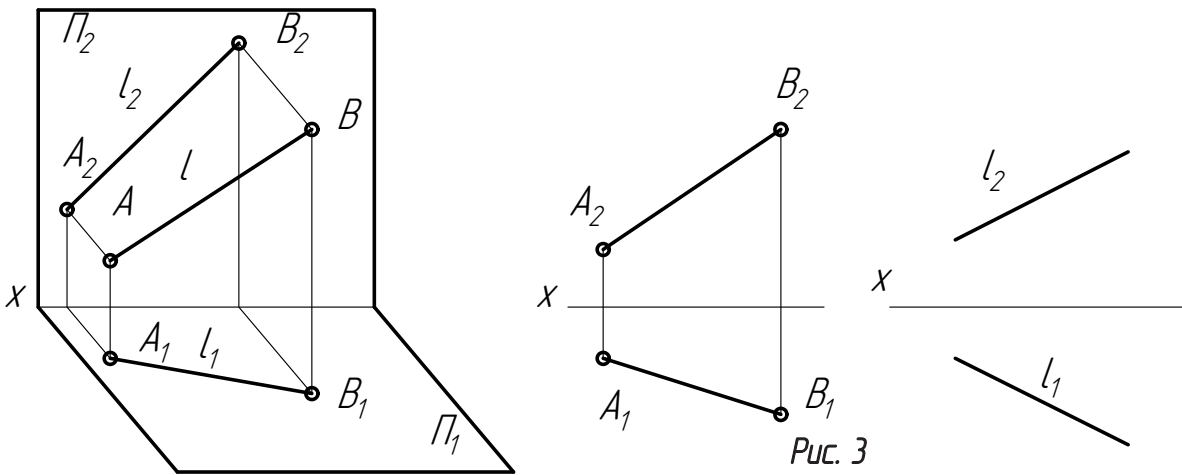


Рис. 3

Якщо точка належить прямій, то її проєкції належать однойменним проєкціям цієї ж прямої (рис. 4).

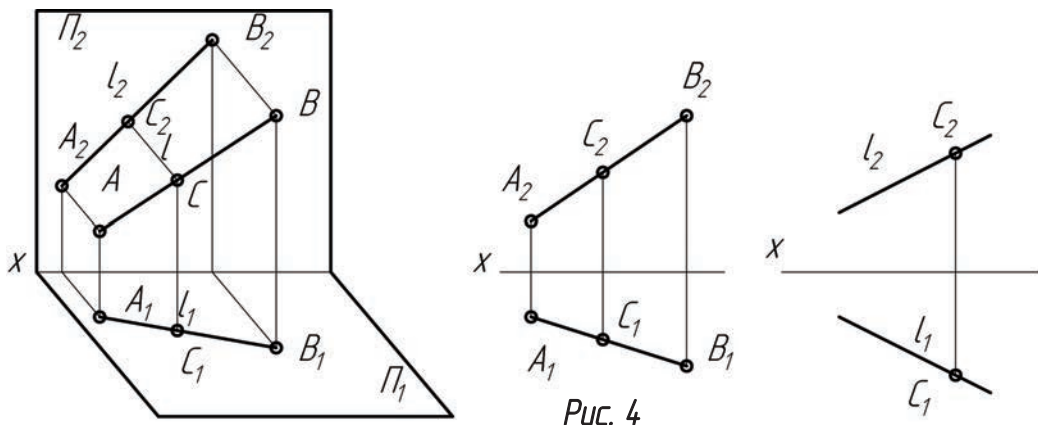


Рис. 4

В залежності від розташування відносно площин проєкцій прямі розподіляються на прямі загального положення (рис.3), та прямі окремого положення. Пряма, що довільно розташована по відношенню до площин проєкцій, називається прямою загального положення. Прямі окремого положення, які паралельні до однієї з площин проєкцій, називаються **прямими рівня** (рис. 5), а ті, які перпендикулярні до площини проєкцій, називають **проекціюючими** (рис.6).

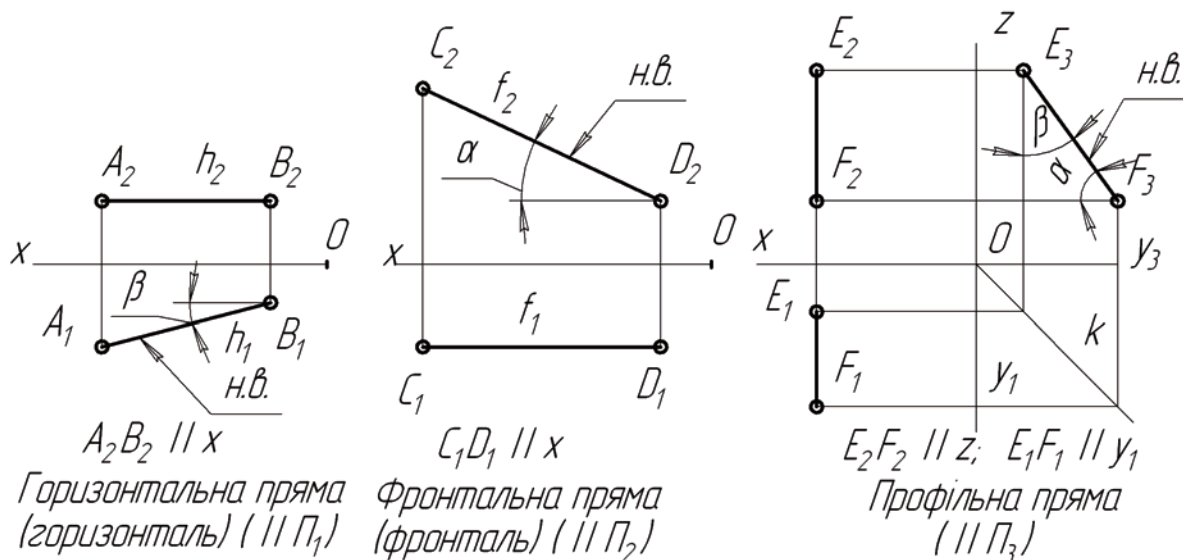


Рис. 5

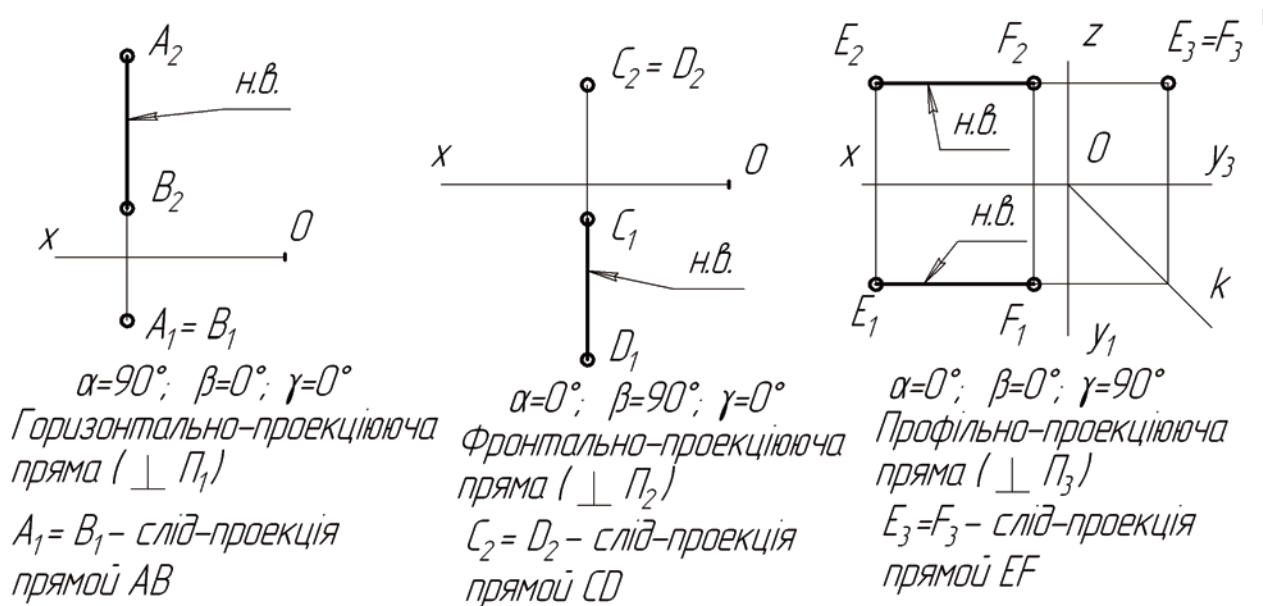


Рис. 6

На креслениках прямих окремого положення визначаються натуральні величини відрізків прямих та кути їх нахилу до площин проєкцій. Прямі загального положення проєкціюються на площини проєкцій спотворено, тому їх кресленики не надають такої інформації. Для визначення натуральних величин відрізків прямих загального положення та кутів її нахилу до площин проєкцій застосуємо метод заміни площин проєкцій.

Перетворення прямої загального положення в пряму окремого положення методом заміни площин проєкцій

Розв'язання багатьох задач можна значно спростити, якщо розглянути задані об'єкти в іншій системі площин проєкцій. Перехід від однієї системи площин проєкцій до іншої здійснюється відповідно загальним положенням методу заміни площин проєкцій.

Розглянемо основні принципи цього методу на прикладі перетворення проєкцій точки.

Нехай дана система площин проєкцій Π_2 / Π_1 . Введемо нову площину проєкцій Π_4 так, щоб $\Pi_4 \perp \Pi_1$. Переходимо до системи площин проєкцій Π_1 / Π_4 (рис.7). При цьому $A_2 A_x = A A_1 = A_4 A_{x_1} = z_A$.

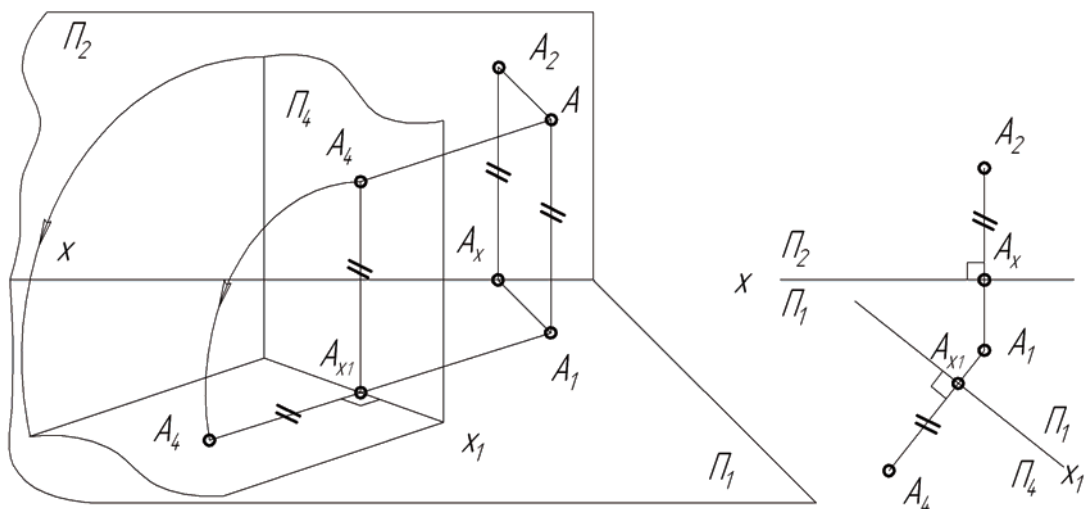


Рис. 7

На комплексному кресленнику нова вісь x_1 , яка є результатом перетину площин проєкцій Π_1 та Π_4 , розташована довільно.

Основні положення методу заміни площин проєкцій

1. Вводимо завжди тільки одну нову площину проєкцій (Π_4), яка має бути перпендикулярною до тієї площини проєкцій (Π_1), що залишається в системі.
2. На рисунку з'являється нова вісь x_1 як результат перетину нової площини проєкцій Π_4 та площини проєкцій Π_1 , що залишається в системі.
3. Відстань від нової проєкції точки (A_4) до нової осі (x_1) дорівнює відстані від проєкції точки, що замінюється (A_2), до попередньої осі (x). Тобто, при заміні фронтальної площини проєкцій незмінною є координата z , а при заміні горизонтальної площини проєкцій Π_1 на Π_5 — координата y .
4. Проекція точки у новій системі площин проєкцій розташована на лінії зв'язку, яка перпендикулярна до нової осі проєкцій.

Методом заміни площин проєкцій розв'язуються задачі на визначення натуральних величин відрізків прямих, плоских фігур, кутів тощо.

Визначення довжини відрізка прямої загального положення та кутів нахилу α та β , які пряма утворює з площинами проєкцій Π_1 та Π_2 .

1. Перетворюємо пряму загального положення в пряму рівня.

Нехай в системі площин проєкцій Π_2/Π_1 задана пряма загального положення AB . Перетворимо її в лінію рівня. Для цього введемо нову площину проєкцій Π_4 паралельно заданій прямій AB ($\Pi_4 \parallel AB$, $x_1 \parallel A_1B_1$) (рис.17). На площині проєкцій Π_4 показаний кут α нахилу відрізка прямої AB до Π_1 . Довжина відрізка A_4B_4 дорівнює натуральній величині відрізка AB (рис.8).

Для визначення кута β нахилу відрізка прямої до Π_2 необхідно здійснити іншу заміну площин проєкцій. Вводимо $\Pi_5 \perp \Pi_2$ та $\Pi_5 \parallel AB$, ($x_2 \parallel A_2B_2$).

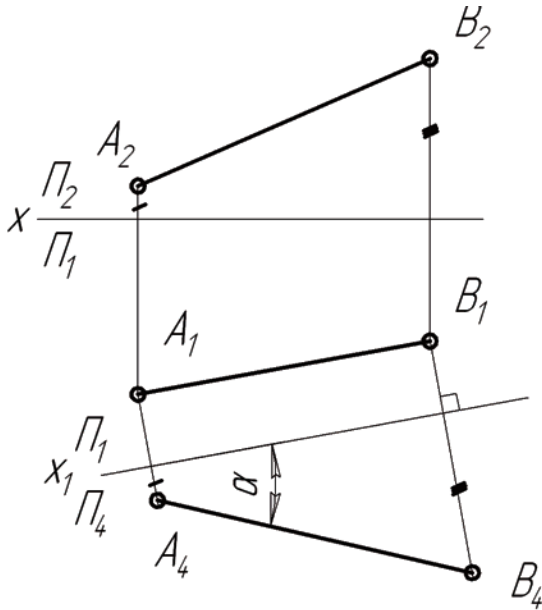


Рис.8

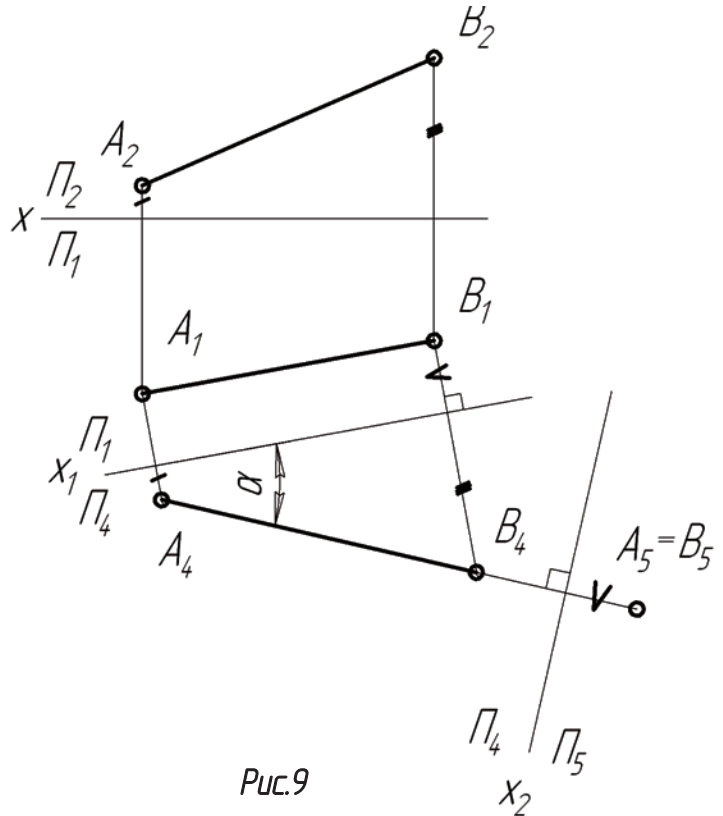


Рис.9

2. Перетворюємо пряму загального положення в проєкціюючу.

Послідовною заміною двох площин проєкцій виконуються такі дії:

- перетворюємо пряму загального положення в пряму рівня (див.п.1);
- лінію рівня перетворюємо в проєкціюючу пряму.

Після перетворення прямої загального положення в пряму рівня нову площину проєкцій вибирають перпендикулярно до лінії рівня. Тоді в системі площин проєкцій Π_4/Π_5 пряма AB буде проєкціюючою. На епюрі вісь x_2 нової системи площин проєкцій проводять під прямим кутом до проєкції A_4B_4 прямої на ту площину проєкцій, якій пряма паралельна (рис.9).

Взаємне розташування двох прямих

Дві прямі у просторі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними.

Паралельні прямі належать одній площині та не мають жодної спільної точки. Однойменні проєкції паралельних прямих також паралельні (рис.10).

Прямі, що перетинаються, також належать площині, але мають одну спільну точку. Їх проєкції перетинаються, а точки перетину однойменних проєкцій знаходяться у проєкційному зв'язку (рис.11).

Мимобіжні прямі не належать одній площині. Проєкції мимобіжних прямих можуть перетинатися, але між точками перетину проєкцій немає проєкційного зв'язку (рис.12).

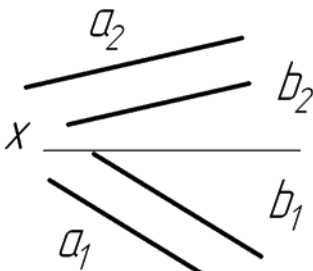


Рис.10

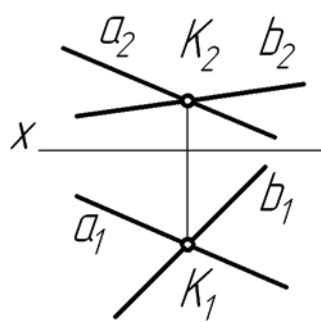


Рис.11

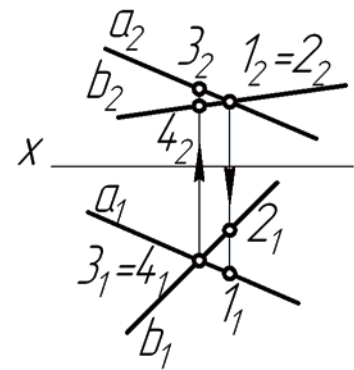


Рис.12

В цьому випадку точки перетину проєкцій — це проєкції двох різних точок, що знаходяться на одному проєкціюючому промені. Наприклад, точки 1 і 2 знаходяться на одному фронтально-проєкціюючому промені, а 3 і 4 — на одному горизонтально-проєкціюючому. Такі точки називаються **конкуруючими**. Вони застосовуються для визначення видимості геометричних об'єктів.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Скільки проєкцій точки визначають її положення в просторі?
Наведіть приклад визначника будь-якої точки.
2. Як розташована у просторі та на комплексному кресленні пряма загального положення?
3. Як задаються профільні прямі?
4. Як визначити натуральну величину відрізка прямої?
5. Які дії треба виконати для визначення кута нахилу прямої загального положення до горизонтальної площини проєкцій?
6. Скільки перетворень площин проєкцій необхідно виконати для визначення натуральної величини відрізка прямої та кутів її нахилу до будь-якої площини проєкцій?
7. Що таке мимобіжні прямі?

Тема 2. Площина

Основні теоретичні відомості

Площина в просторі нескінченна. Проекція площини в загальному випадку — все поле площини проєкцій. Положення площини у просторі задають три точки, які не належать одній прямій.

Таким чином, **визначник площини** — три точки $\Sigma(A, B, C)$. Площину можна задати також і деякими іншими способами (рис. 13). Так, площина Γ задана проєкціями плоскої фігури (ΔKLM), площина Δ — двома паралельними прямими m і n , площина Θ — двома прямими c і d , що перетинаються, площина Λ — двома лініями рівня f і h , що перетинаються, площина Ω — прямою l та точкою D , що не належить l .

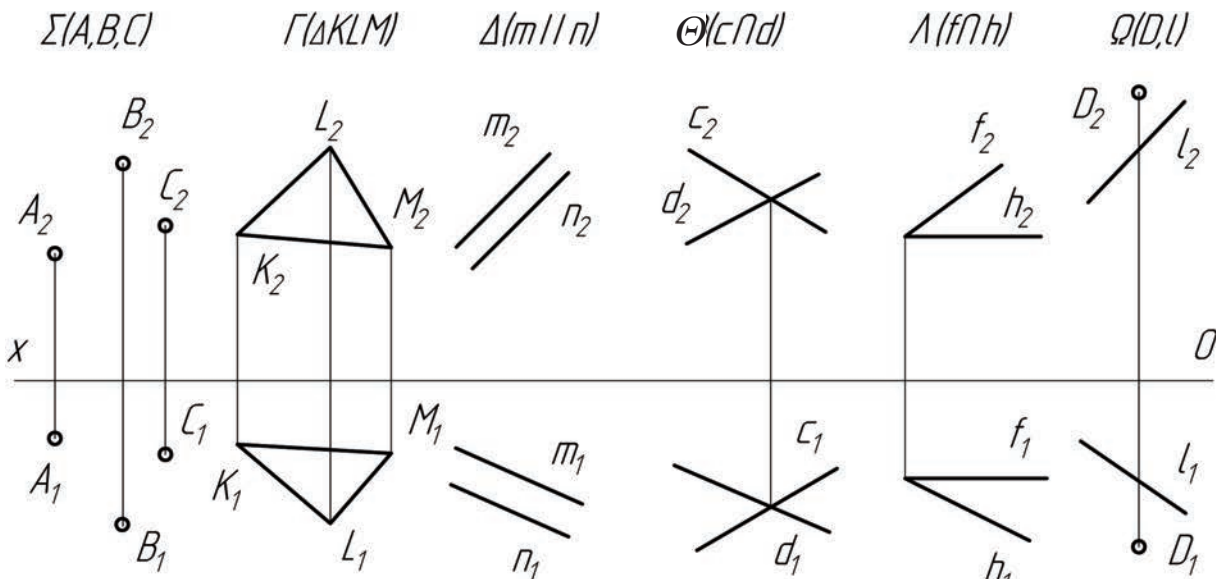


Рис. 13

Точки та прямі в площині. Умови належності

Пряма належить площині (рис. 14):

- якщо вона проходить через дві точки цієї площини;
- якщо вона проходить через одну точку цієї площини і паралельна прямій, яка належить цій площині.

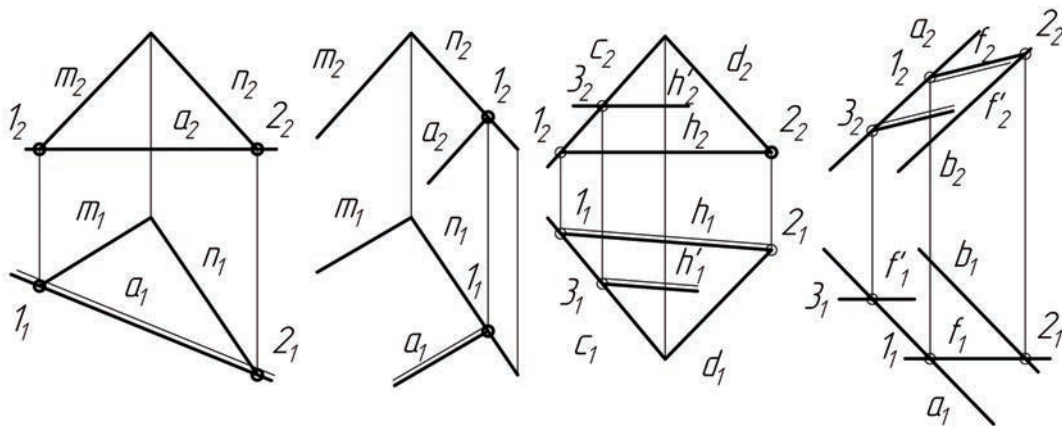


Рис. 14

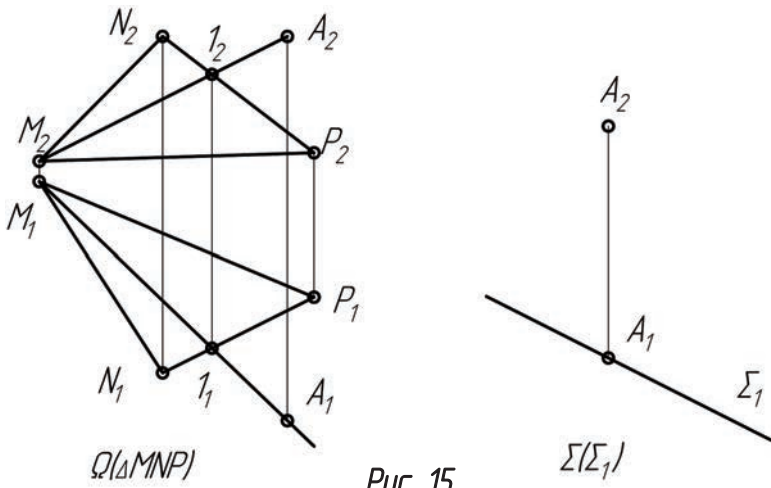


Рис. 15

Точка належить площині, якщо вона належить прямій, яка належить цій площині (рис.15).

Площини загального та окремого положення

В залежності від розташування відносно площин проєкцій площини розподіляються на площини **загального** та **окремого положення**.

Площини загального положення не паралельні та не перпендикулярні жодній площині проєкцій (рис.13).

Серед площин окремого положення виділяють **площини рівня**, які паралельні одній з площин проєкцій (рис.16), та **проєкціючі площини**, які перпендикулярні одній з площин проєкцій (рис. 17).

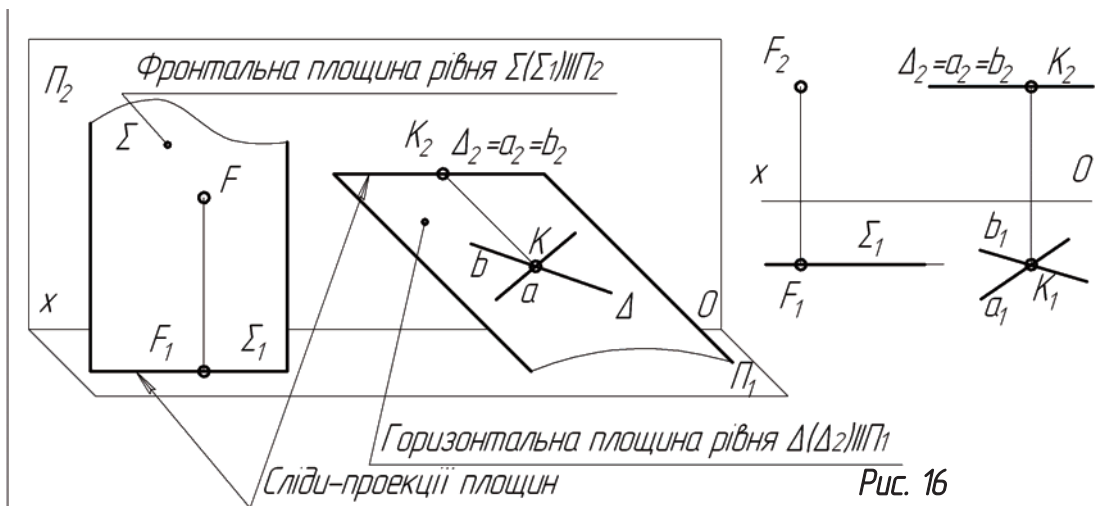


Рис. 16

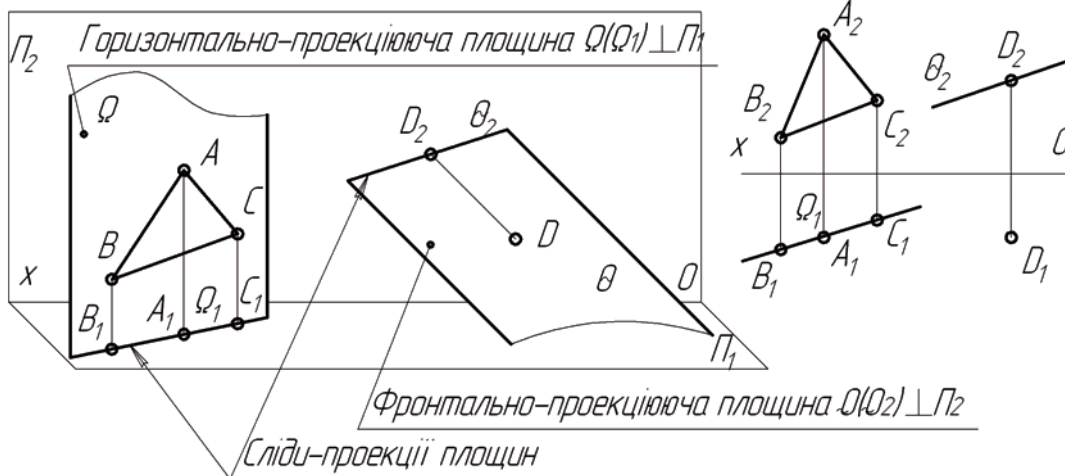


Рис. 17

Площини окремого положення на епюрі можуть задаватися однією лінією — слідом-проекцією. **Слід-проекція площини** — це водночас і лінія перетину (слід) площини окремого положення з площиною проєкцій, і проєкція цієї площини на площину проєкцій. Слід-проекція площини окремого положення має збиральні властивості, тобто всі геометричні об'єкти (точки, прямі, плоскі криві, плоскі фігури), що належать площині окремого положення, проєкціюються на її відповідний слід-проекцію.

Перетворення площини методом заміни площин проєкцій

Виконуючи перетворення площини загального положення в проєкціюючу можна визначити кути її нахилу до площин проєкцій, а перетворення площини загального положення в площину рівня дає можливість отримати натуральну величину геометричних елементів, що належать цій площині.

Перетворення площини загального положення $\Sigma(\Delta ABC)$ в проєкціюючу.

Для переходу від системи площин проєкцій Π_2/Π_1 до системи Π_1/Π_4 , в якій $\Sigma \perp \Pi_4$, достатньо, щоб довільна горизонталь h площини Σ була перпендикулярна до Π_4 . Тоді в системі площин проєкцій Π_1/Π_4 горизонталь h буде проєкціюючою прямою, а сама площина на Π_4 буде представлена слідом-проекцією. Розташуємо $x_1 \perp h_1$.

На площині Π_4 будують проєкцію h_4 горизонталі h (проєкції точок C і I на площину Π_4 збігаються, тому, що мають однакову координату z), потім будують проєкцію довільної точки площини Σ , (на рис. 18 — проєкція B_4 точки B). Слід-проекція Σ_4 площини проводиться через h_4 і B_4 .

В даному перетворенні визначається кут α нахилу площини Σ до площини проєкцій Π_1 . Це кут між слідом-проекцією площини Σ_4 і віссю x_1 .

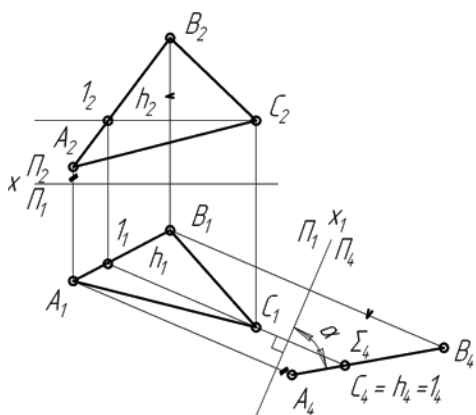


Рис.18

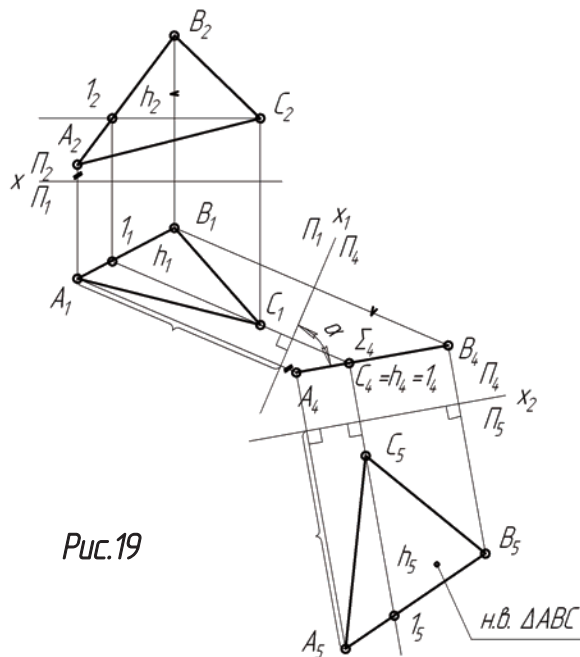


Рис.19

Перетворення цієї ж площини в проєкціюючу за допомогою фронталі призведе до визначення кута β нахилу площини до Π_2 .

Перетворення площини загального положення в площину рівня.

Це перетворення розглянуто на прикладі площини загального положення $\Sigma(\Delta ABC)$. Послідовно заміною двох площин проєкцій виконують такі дії:

- перетворюємо площину загального положення в проєкціюючу площину (рис. 19);
- проєкціюючу площину перетворюємо в площину рівня.

Після перетворення площини загального положення в проєкціюючу систему площин проєкцій Π_1/Π_4 замінюють системою Π_4/Π_5 , в якій площина проєкцій Π_5 повинна бути паралельною площині трикутника. Для цього проводять нову вісь проєкцій $x_2 \parallel A_4B_4C_4$.

Будують проєкції точок A_5, B_5, C_5 на площині Π_5 . Сполучають побудовані проєкції відрізками прямих в трикутник, який і буде натуральною величиною ΔABC (рис. 19).

Проекціювання кола

Коло — найпоширеніша плоска крива. Вона може проєкціюватися в коло, відрізок та еліпс.

Якщо коло належить площині рівня (рис. 20), одна його проєкція — відрізок A_2B_2 , що дорівнює діаметру кола, інша — коло.

Якщо коло належить проєкціюючій площині (рис. 21), одна його проєкція — відрізок A_2B_2 , що дорівнює діаметру кола, інша — еліпс. Для побудови еліпса досить побудувати проєкції двох взаємно перпендикулярних діаметрів кола, які називаються спряженими. Один з діаметрів (AB) паралельний, другий (CD) — перпендикулярний тій площині проєкцій, до якої перпендикулярна площина кола. Тоді на другу площину проєкцій спряжені діаметри проєкціюються в осі еліпса. Велика вісь еліпса C_1D_1 дорівнює діаметру d кола, а розмір малої осі A_1B_1 визначається за проєкційним зв'язком.

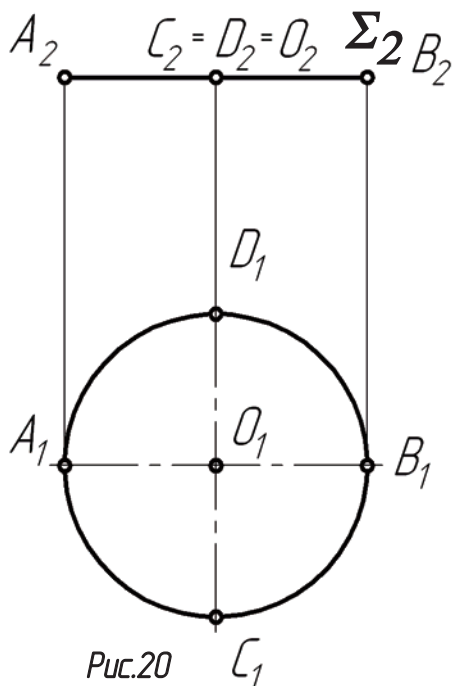


Рис.20

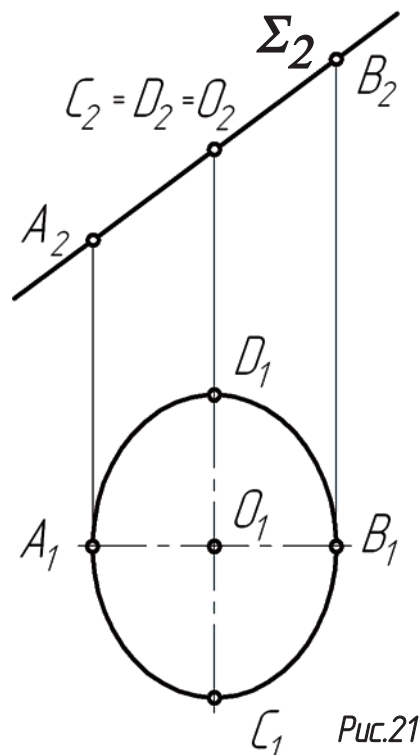


Рис.21

Побудова проміжних точок еліпса за його осями наведена на рис.22. Для розв'язання завдань у зошиті досить побудувати 8 проміжних точок: по 2 у кожній чверті еліпса.

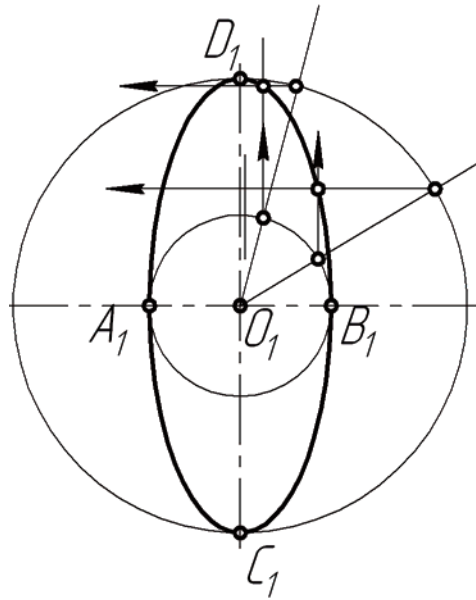


Рис.22

Якщо коло належить площині загального положення, обидві проекції кола — еліпси, які будуються незалежно один від одного. Проекційний зв'язок визначається лише для проекцій центра кола. Фронтальна проекція великої осі еліпса паралельна фронтальній проекції фронталі площини кола, а горизонтальна проекція великої осі еліпса паралельна горизонтальній проекції горизонталі цієї площини, причому обидві дорівнюють діаметру кола. Малі вісі визначаються за допомогою заміни площин проекцій та перетворення площини загального положення у проєкціючу, тобто задача знаходження розміру малої осі еліпса зводиться до наведеної на рис. 21.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Що таке визначник площини?
Наведіть приклади.
2. Як побудувати пряму в площині?
3. Наведіть умову належності точки площині.
4. Що таке слід-проекція площини окремого положення?
5. Які дії необхідно виконати для визначення натуральної величини фігури, що належить площині загального положення?

Тема 3. Поверхні

Основні теоретичні відомості

В нарисній геометрії поверхня розглядається як множина точок, що утворена безперервним рухом лінії за певним законом. Лінія, що утворює поверхню, називається твірною. Закон руху твірної визначається напрямними елементами і положенням твірної відносно цих елементів у будь-який момент руху.

Визначником поверхні є сукупність геометричних елементів та інших умов, що визначають поверхню. Визначник складається з двох частин: геометричної і алгоритмічної (або кінематичного закону).

Геометрична частина визначника — сукупність геометричних елементів (твірна, напрямні елементи), якими задається поверхня. **Алгоритмічна частина** — це закон, який дозволяє в будь-який момент руху твірної з'ясувати її положення та форму.

Наприклад, конічна поверхня (рис. 23) утворена рухом прямої лінії l , яка в кожний момент руху перетинає напрямну лінію m і проходить через точку S .

Визначник поверхні:

$\Phi(m, S)$ — геометрична частина,

$(l \cap m, l \in S)$ — алгоритмічна частина.

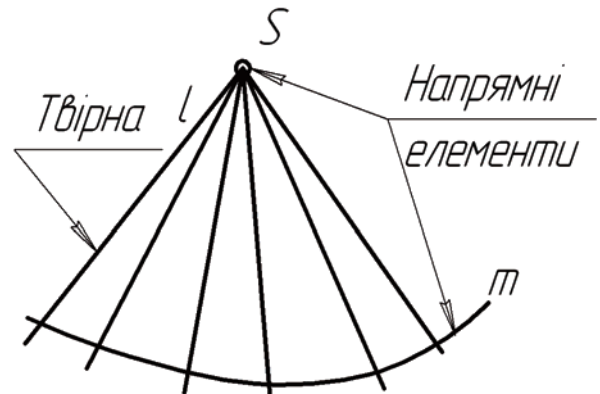


Рис.23

Зображення поверхні рекомендується виконувати в такій послідовності:

— визначити напрямні елементи (рис. 24);

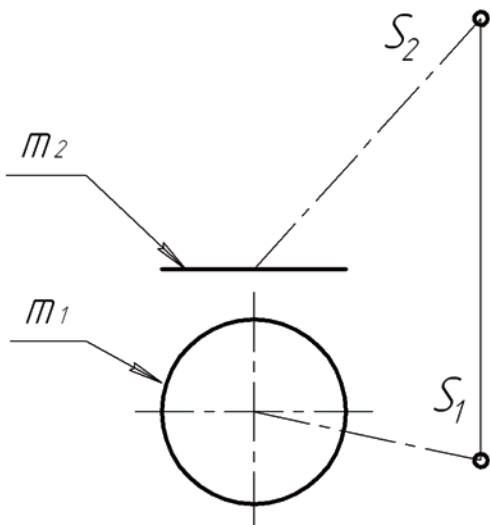


Рис.24

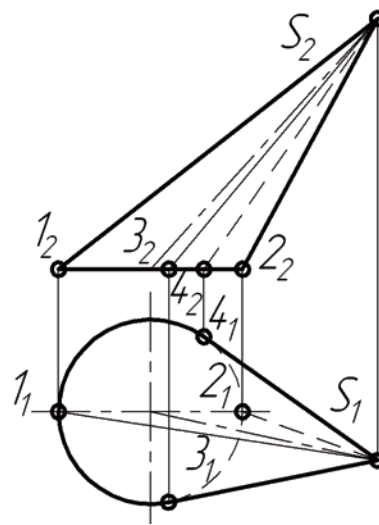


Рис.25

— побудувати обрисні твірні поверхні (рис.25).

Точка належить поверхні, якщо її проєкції лежать на однойменних проєкціях лінії, яка знаходиться на поверхні (на рис. 26 точка $5 \in m$, пряма $S5 \subset \Phi(m, S)$, точка $K \in S5$, тому точка $K \in \Phi(m, S)$).

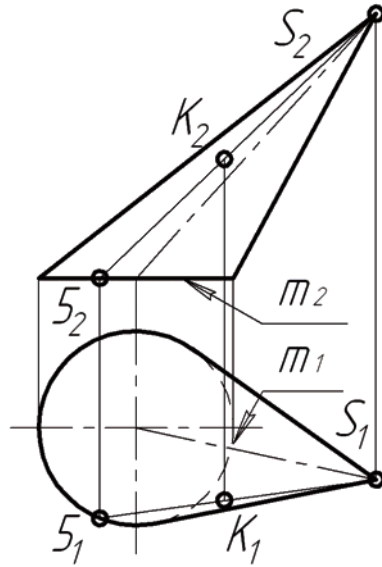


Рис.26

Найбільш поширеними поверхнями є **лінійчасті поверхні**, які можуть бути утворені рухом прямої лінії. Лінійчасті поверхні, у яких твірні паралельні або перетинаються, є розгортними (рис. 27).

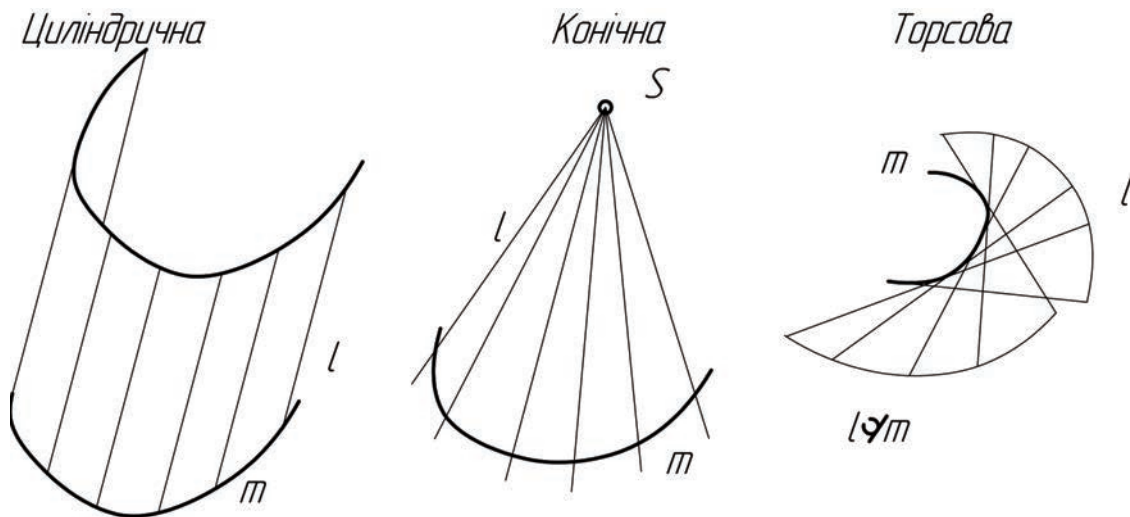
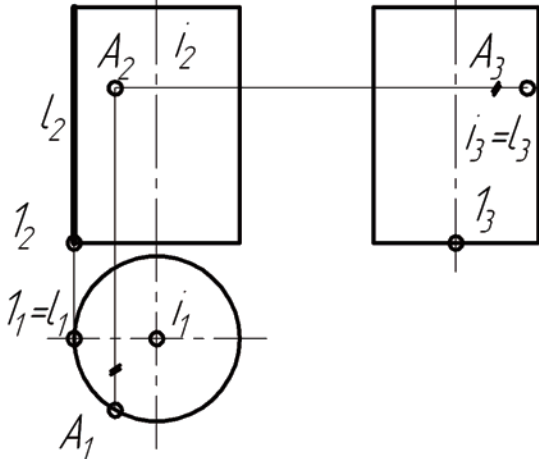
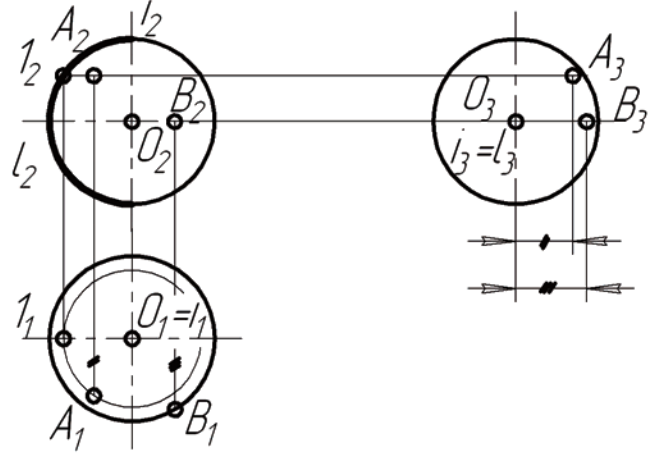


Рис. 27

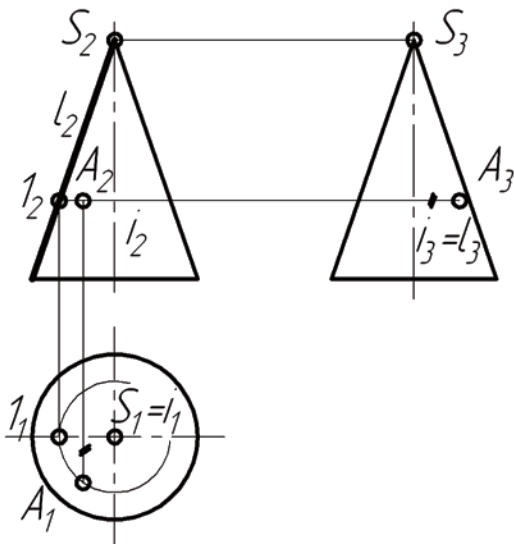
Циліндр обертання $\Sigma(l, i)$
 i – вісь обертання, $l \parallel i$



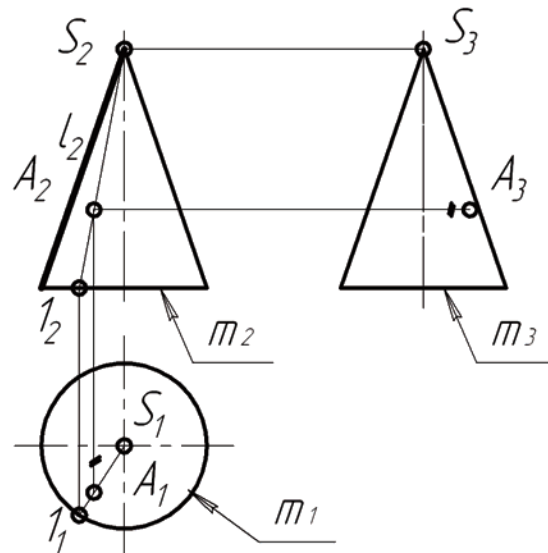
Сфера $\Delta(l, i)$, l – півколо, $O \in i$,
 O – центр півкола, i – вісь обертання,



Конус обертання $\Phi(l, i)$
 i – вісь обертання, $l \perp i$



Конус як лінійчаста поверхня $\Phi(m, S)$
 $l \cap m, S \in l$



Піраміда – гранна поверхня

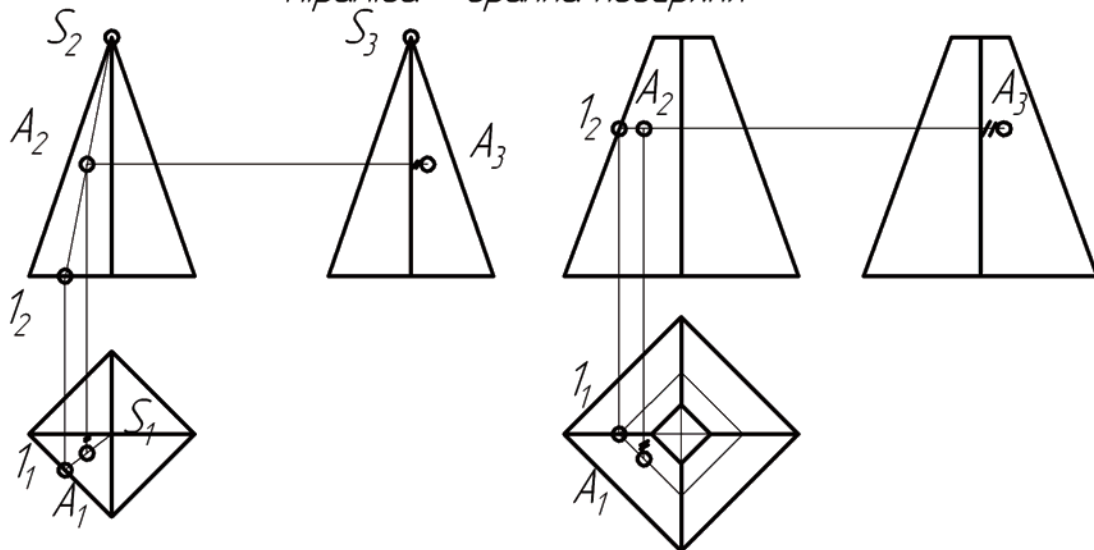


Рис. 28

Поверхні обертання можуть бути утворені обертанням довільної лінії (твірної) навколо осі обертання. В залежності від типу твірної і її положення відносно осі обертання можна отримати такі поверхні:

- пряма лінія, що паралельна осі обертання — **циліндр обертання**;
- пряма лінія, що перетинає вісь обертання — **конус обертання**;
- пряма лінія, що мимобіжна до осі обертання — **гіперболоїд обертання**;
- коло, центр якого належить осі обертання — **сферична поверхня**;
- коло, центр якого не належить осі обертання — **торова поверхня**.

Приклади деяких поверхонь та методика побудови точок на них наведено на рис. 28.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Що таке визначник поверхні?
2. Які умови належності точки поверхні?
3. Що таке поверхня обертання?
4. Наведіть приклади лінійчастих розгортних поверхонь.

Тема 4. Аксонометрія

Основні теоретичні відомості

Зміст методу аксонометричного проєкціювання полягає в тому, що предмет відносять до деякої системи координат, а потім його разом з системою координат проєкціюють паралельними променями на будь-яку картинну площину Π' (рис. 29). Одержані таким чином проєкції називаються аксонометричними і мають властивості наочності та оберненості.

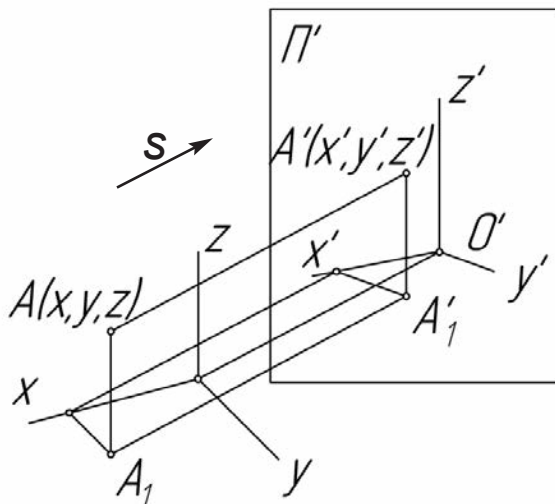


Рис. 29

Напрямок проєкціювання вибирають так, щоб він не збігався з жодною з координатних осей. При цьому зображення виходить наочним. Якщо напрямок проєкціювання перпендикулярний до площини аксонометричних проєкцій, то аксонометрія — прямокутна, якщо ні, то — косокутна.

На аксонометричних проєкціях можна вимірювати прямолінійні елементи предмета, що паралельні координатним осям.

Побудова аксонометричного зображення предмета виконується за характерними точками з урахуванням властивостей паралельного проєкціювання: в аксонометрії зберігаються паралельність прямих, належність точок прямим та кривим лініям та пропорційність відрізків на одній прямій та паралельних прямих.

Характерні точки будуються за координатами.

З метою використання методу координат в аксонометрії вводяться показники спотворення по осях. Показники спотворення дорівнюють відношенням аксонометричних координат точки до відповідних натуральних координат:

$$u = x'/x; \quad v = y'/y; \quad w = z'/z.$$

В залежності від співвідношення між показниками спотворення розрізняють

— ізометрію, якщо показники за всіма осями однакові $u = v = w$;

— диметрію, якщо показники за двома осями однакові, а за третій відрізняється $u = w \neq v$;

— триметрію, якщо показники за всіма осями різні.

Якщо показники спотворення відомі, можна побудувати аксонометричне зображення точки за її натуральними координатами: $x' = ux$; $y' = vy$; $z' = wz$.

Ці ж формули надають можливість визначити натуральні координати точок по їх аксонометричним зображенням.

Показники спотворення зв'язані між собою співвідношенням:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 \text{ — в прямокутній аксонометрії;}$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \text{ctg}^2 \varphi \text{ — в косокутній аксонометрії,}$$

де φ — кут між напрямом проєкціювання та площиною Π' .

Згідно з ГОСТ 2.317-69 у конструкторській практиці застосовуються п'ять стандартних видів аксонометрії: прямокутні ізометрія та диметрія, косокутні фронтальні ізометрія та диметрія та косокутна горизонтальна ізометрія.

Прямокутна ізометрія

На рис. 30 наведено розташування осей в ізометрії, коефіцієнти спотворення однакові $u = v = w$, та дорівнюють

$$u = \sqrt{2/3} = 0.82$$

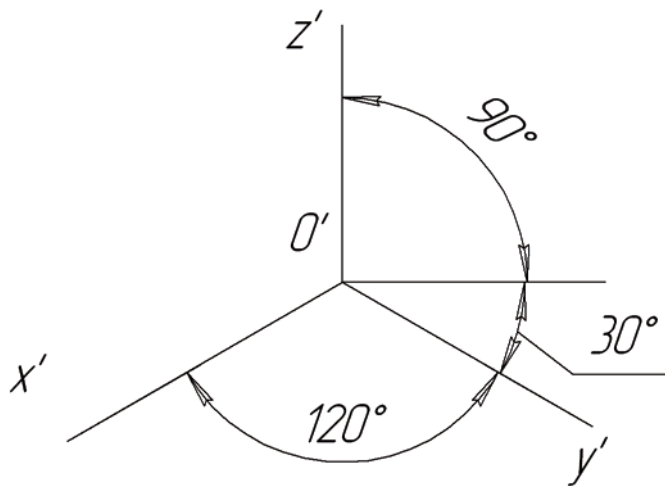


Рис. 30

Для спрощення побудови користуються коефіцієнтами спотворення $u=1$, які називаються **приведеними**. При цьому зображення збільшується в $1/0,82 = 1,22$ рази, і така ізометрія називається **приведеною**.

Аксонометрична проєкція кола — еліпс. Якщо коло належить площині рівня, мала вісь (м.в.) еліпса паралельна тій координатній осі, що відсутня в площині кола, а велика (в.в.) — перпендикулярна до неї (рис.31). В приведеній прямокутній ізометрії для всіх координатних площин мала вісь дорівнює $0,71d$, велика — $1,22d$ (d — діаметр кола).

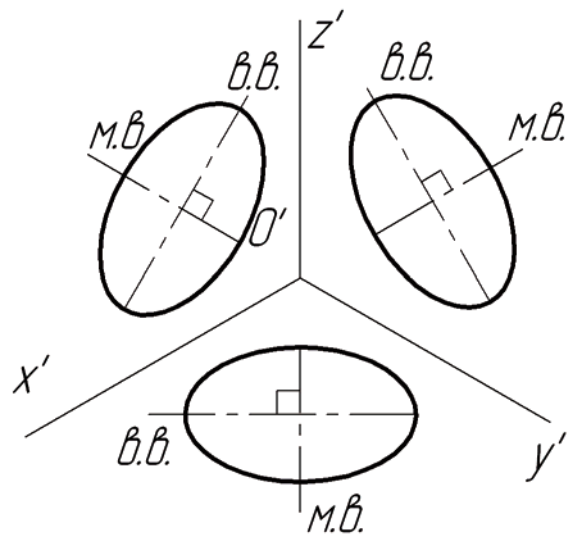


Рис. 31

Для спрощення побудови аксонометричного зображення стандартом дозволяється замінювати еліпси овалами. Побудова овала, що зображує коло радіуса R , розташоване в горизонтальній площині, наведена на рис.32.

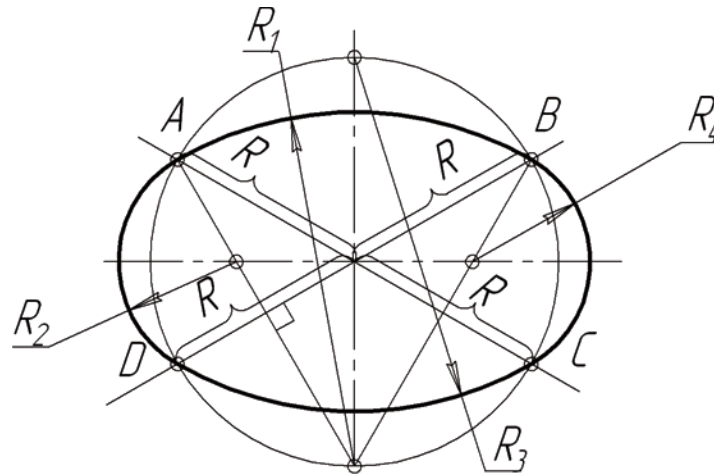


Рис. 32

Лінії штрихування виконують паралельно ізометричній проекції однієї з діагоналей квадратів, сторони яких розташовані на координатних осях відповідної площини перерізу (рис. 33).

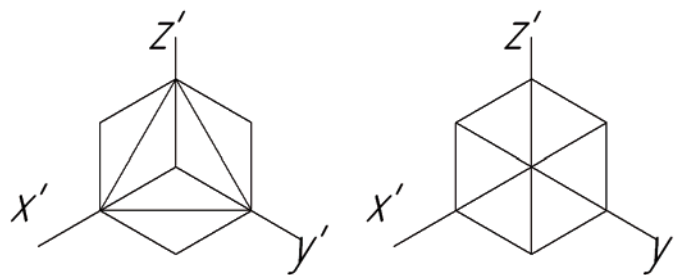


Рис. 33

Прямокутна диметрія

На рис. 34 наведено розташування осей в диметрії, коефіцієнти спотворення за осями x та z однакові, а уздовж осі y в 2 раза менше $u = 2v = w$, та дорівнюють

$$u = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,94, \quad v = 0,5u = 0,47$$

Для спрощення побудови користуються коефіцієнтами спотворення $u = w = 1$, $v = 0.5$, які називаються **приведеними**. При цьому зображення збільшується в $1/0,94 = 1,06$ рази, і така диметрія називається **приведеною**.

Аксонометрична проекція кола — еліпс. Якщо коло належить площині рівня, мала вісь (м.в.) еліпса паралельна тій координатній осі, що відсутня в площині кола, а велика (в.в.) — перпендикулярна до неї (рис.35). В приведеній прямокутній диметрії велика вісь еліпса дорівнює $1,06d$ (d — діаметр кола), а мала вісь для двох координатних площин, що містять вісь y , дорівнює $0,35d$ (вузький еліпс), а для площини xOz — $0,95d$ (широкий еліпс).

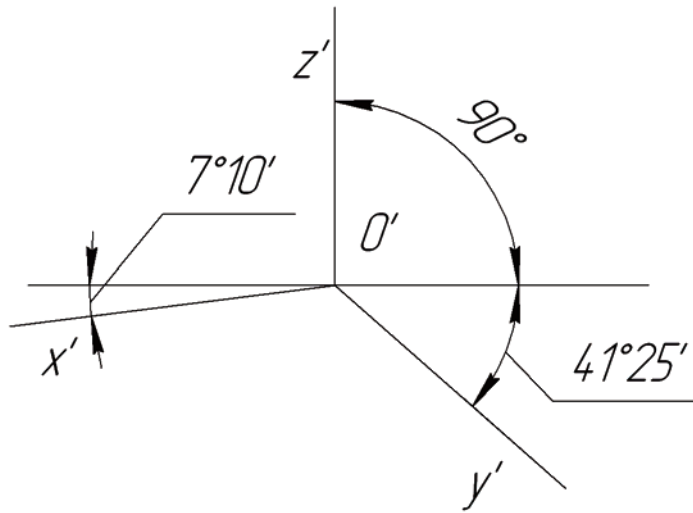


Рис. 34

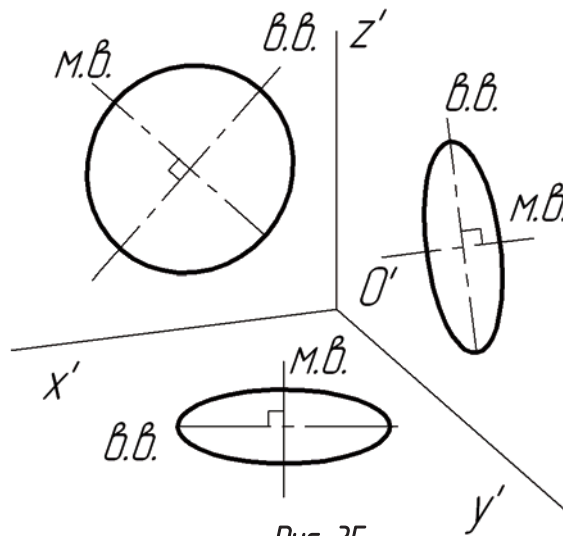


Рис. 35

Для спрощення побудови аксонометричного зображення стандартом дозволяється замінювати еліпси овалами. Побудова овалів, що зображує коло радіуса R , розташоване в горизонтальній площині, наведена на рис.36 (вузький овал), а коло, що належить фронтальній площині на рис.37 (широкий овал).

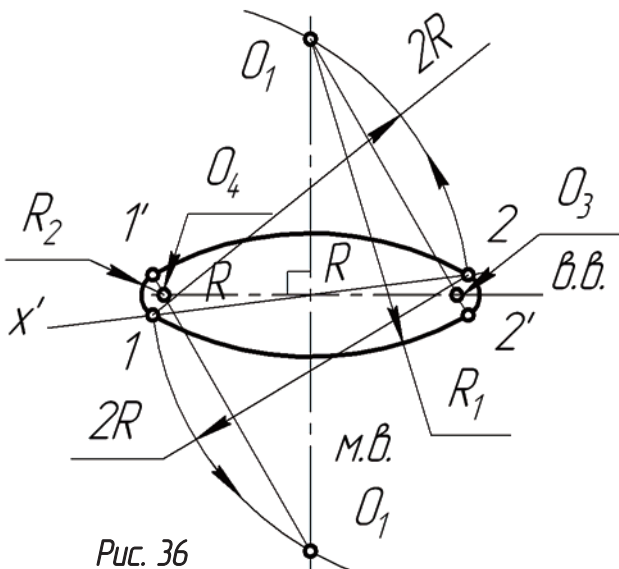


Рис. 36

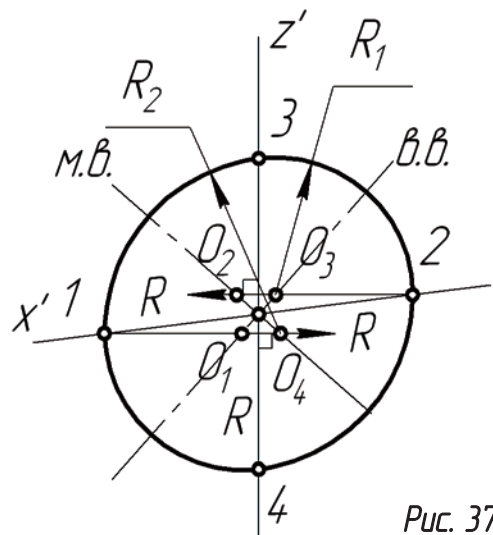


Рис. 37

На рис. 38 наведена побудова напряду штрихування перерізів у прямокутній діаметрії.

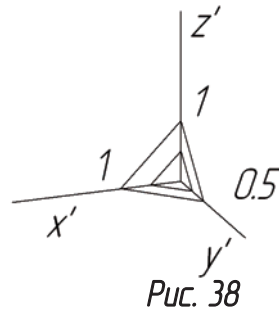


Рис. 38

Косокутна фронтальна ізометрія

Схеми систем опалення, вентиляції і кондиціонування повітря рекомендується виконувати у косокутній фронтальній ізометрії (ДСТУ Б А.2.4-41:2008).

На рис. 39 наведено розташування осей в косокутній фронтальній ізометрії. Зображення в косокутній фронтальній ізометрії виконується без спотворення по осях.

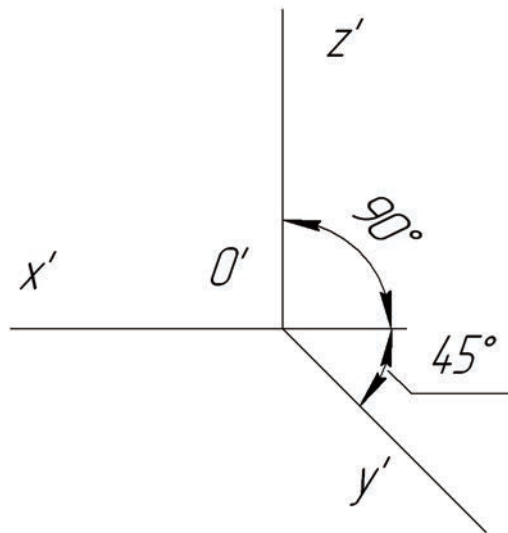


Рис. 39

Кола, які належать фронтальним площинам, проєкціюються в кола, а ті, що належать горизонтальним та профільним площинам проєкціюються в еліпси (рис. 40), великі осі яких дорівнюють $1,3d$, а малі — $0,54d$ діаметра кола.

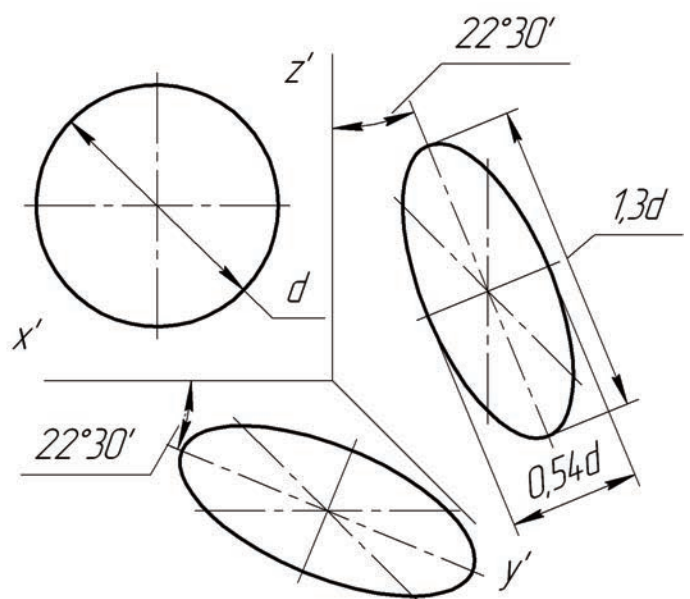
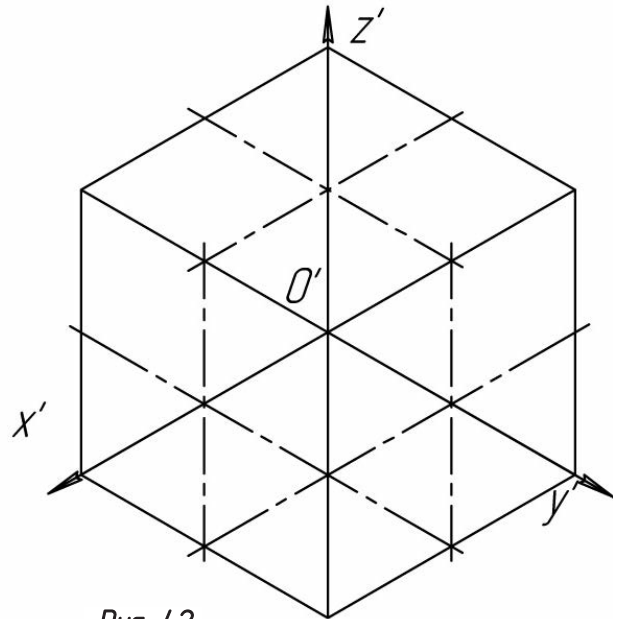
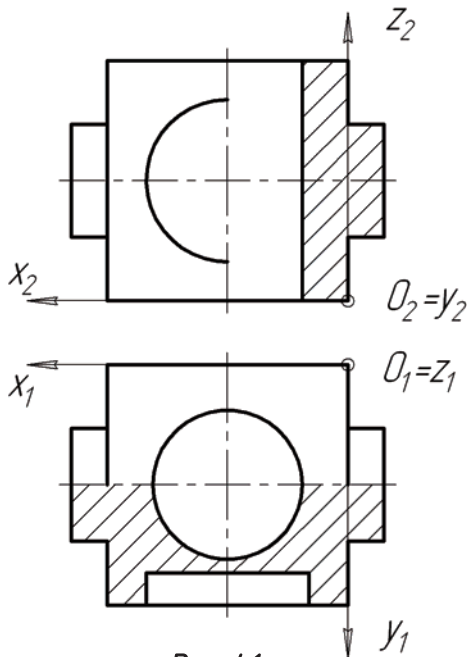


Рис. 40

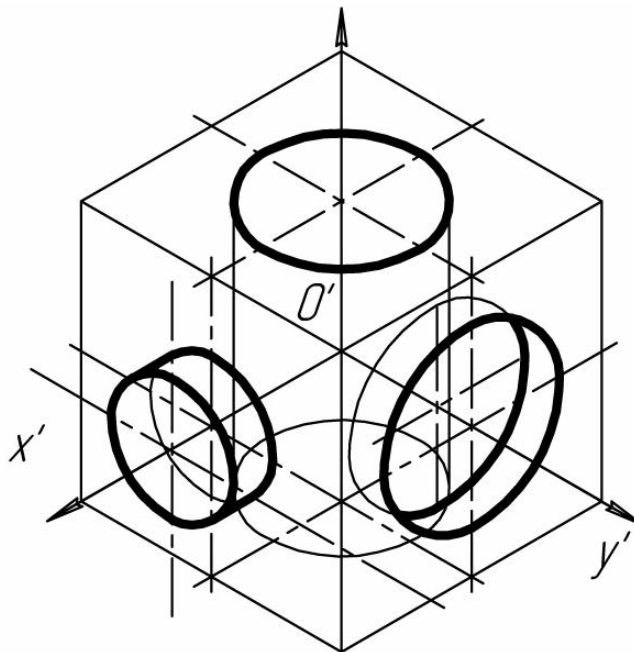
Алгоритм побудови аксонометрії деталі

Алгоритм побудови аксонометричної проекції деталі по її ортогональних проекціях наведено на прикладі приведеної прямокутної ізометрії деталі (рис. 41).



Передусім слід звернути увагу на те, що спочатку слід віднести зображення деталі до будь-якої системи координат.

Потім будують основну геометричну форму деталі — куб (рис.42) та креслять задані отвори та виступи (рис.43)



Наприкінці будують виріз передньої лівої частини деталі координатними площинами (рис.44), та заштриховують перерізи (рис.45).

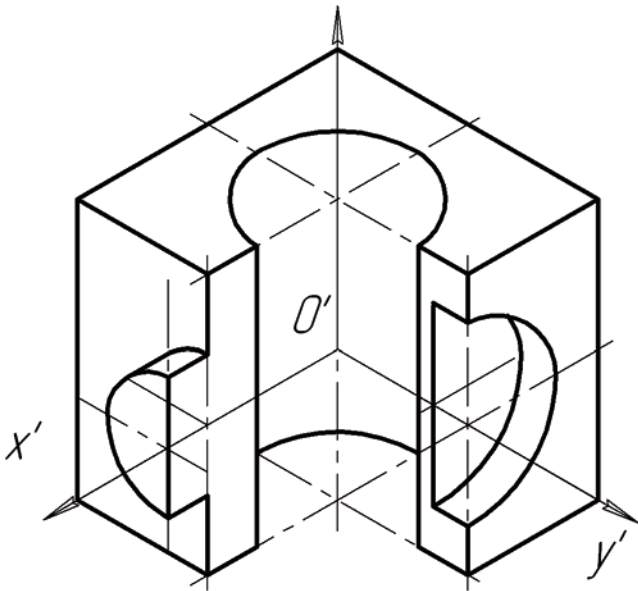


Рис. 44

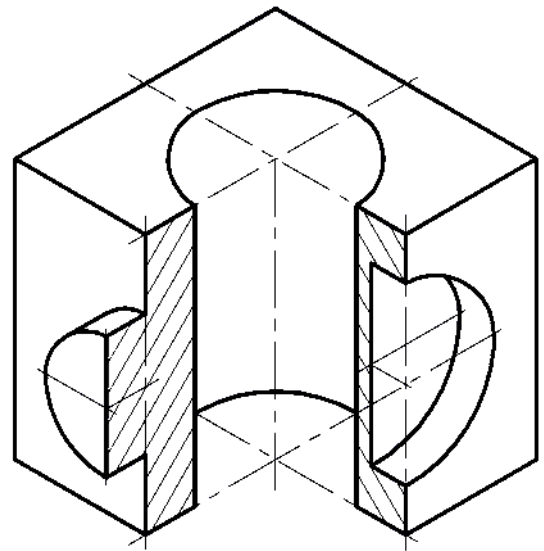


Рис. 45

Слід наголосити на тому, що побудоване наочне зображення деталі — це перш за все, — кресленик, згідно якому мають бути виявлені всі розміри деталі. Тому необхідно стежити за тим, щоб на ізометричному зображенні були позначені штрих-пунктирною лінією осі усіх поверхонь обертання.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Що таке аксонометрична проекція?
2. З якою метою застосовується приведена аксонометрична проекція?
Чим вона відрізняється від точної?
3. Як визначаються показники спотворення?
4. Навести розташування великих осей еліпсів — проекцій кіл у прямокутній аксонометрії?
5. Як виконується штрихування перерізів, що розташовані в координатних площинах у прямокутній диметрії?

Тема 5. Переріз поверхонь площинами. Розгортки поверхонь

Основні теоретичні відомості *Перетин поверхні з площиною*

Перетин поверхні з площиною — це плоска лінія, форма якої залежить від типу поверхні та взаємного положення січної площини і поверхні. Лінія перетину будується за допомогою точок перетину найпростіших ліній цієї поверхні з січною площиною. Для гранних поверхонь — це ребра, для конусів та циліндрів — це твірні або паралелі, для сфери — паралелі.

На лінії перетину виділяють характерні (опорні) та допоміжні точки. Передусім лінії на поверхні вибирають таким чином, щоб визначити характерні точки. Це точки, які відрізняються своїм особливим розташуванням відносно площин проєкцій, або які займають виняткове положення на кривій перетину:

— найближча та найбільш віддалена точка відносно кожної з площин проєкцій (екстремальні точки);

— точки, які розташовані на проєкціях обрисних твірних на всіх площинах проєкцій (межі видимості);

— характерні точки кривої перетину (вершини ламаної — для гранних поверхонь, точки на кінцях великої та малої осей еліпса, вершини дуг парабол та гіпербол, кінці дуг кривих тощо).

Якщо для виявлення форми лінії перетину характерних точок недостатньо, будують проміжні точки в тих місцях і в тій кількості, щоб криву можна було провести за допомогою лекала.

Перетин гранної поверхні з площиною

При перетині гранної поверхні з площиною утворюється багатокутник.

На рис. 46 наведено приклад перетину поверхні піраміди з фронтально-проєкціуючою площиною $\Sigma(\Sigma_2)$. Для побудови лінії перетину послідовно будують точки перетину кожного з ребер піраміди з площиною Σ .

Для визначення натуральної величини фігури перерізу застосовується метод заміни площин проєкцій.

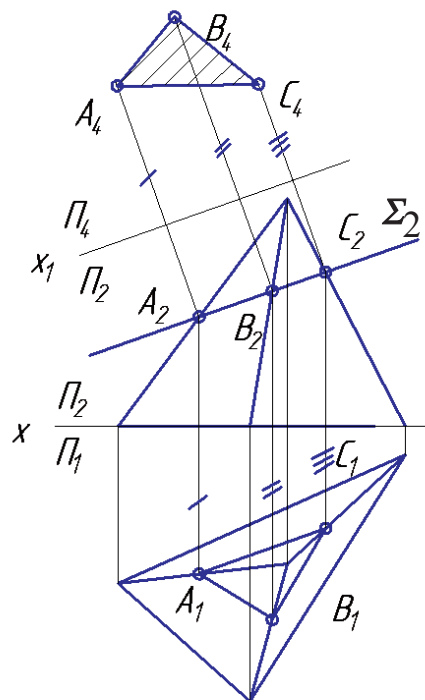
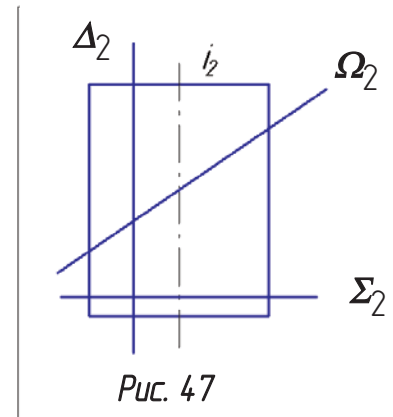


Рис. 46

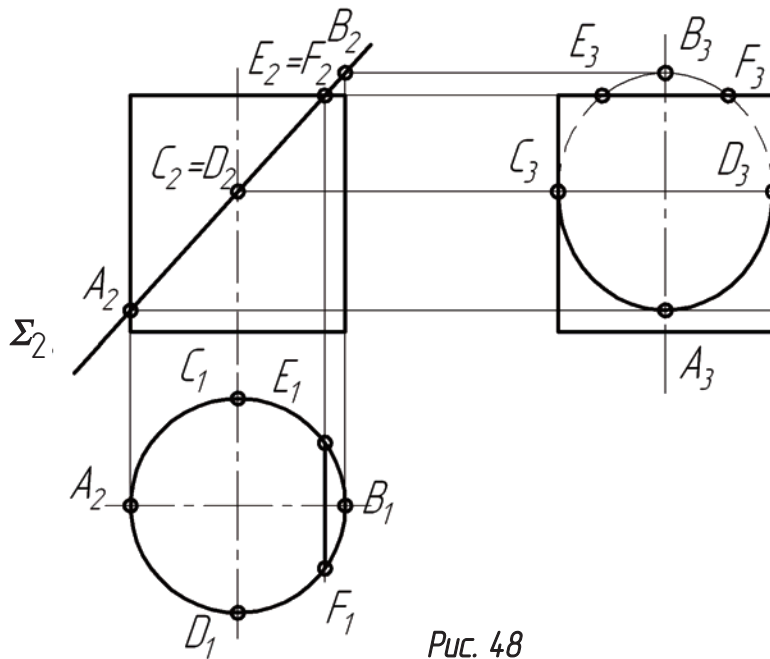
Перетин поверхні циліндра з площиною

В залежності від розташування січної площини відносно поверхні циліндра обертання лінія перетину може бути еліпсом, колом чи прямокутником (рис. 47):

- якщо січна площина $\Omega(\Omega_2)$ розташована похило до осі обертання i , в перерізі — еліпс;
- якщо січна площина $\Sigma(\Sigma_2)$ перпендикулярна до осі i , маємо коло;
- якщо січна площина $\Delta(\Delta_2)$ паралельна осі обертання i , в перерізі — прямокутник, дві сторони якого є частинами твірних циліндра.



На рис. 48 наведено приклад побудови лінії перетину циліндра з фронтально-проекціуючою площиною $\Sigma(\Sigma_2)$ по частині еліпса, яка більш, ніж половина. Проекції лінії перетину будуються методом повного перерізу, тобто циліндрична поверхня продовжується до повного перерізу з січною площиною. Визначається повний переріз поверхні, а потім виділяється та його частина, яка належить поверхні геометричного тіла (ECADF).



В перерізі утворюється еліпс, велика вісь якого AB , залежить від кута нахилу січної площини Σ до осі обертання циліндра, а мала CD дорівнює діаметру циліндра. Проекція цього еліпса на Π_2 — відрізок прямої, який належить сліду-проекції Σ_2 площини Σ , на Π_1 — коло, на Π_3 — еліпс. Точки C і D — межі видимості лінії перерізу на Π_3 . Проміжні точки еліпса будують графічним методом за його осями або як довільні точки лінії перерізу.

Перетин поверхні конуса з площиною

В залежності від розташування січної площини відносно осі конуса можливі такі форми лінії перетину (рис. 49):

- коло, якщо площина $\Sigma(\Sigma_2)$ перпендикулярна до осі обертання;
- еліпс, якщо площина $\Theta(\Theta_2)$ перетинає усі твірні конуса, та розташована під гострим кутом до осі обертання;
- парабола, якщо площина $\Delta(\Delta_2)$ паралельна одній твірній конуса;
- гіпербола, якщо площина $\Omega(\Omega_2)$ паралельна двом твірним конуса;
- трикутник, дві сторони якого — твірні конуса, якщо площина $\Gamma(\Gamma_2)$ проходить через вершину конуса.

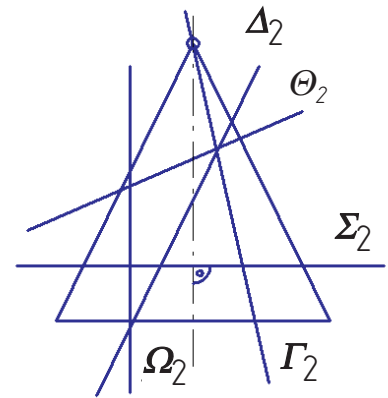


Рис. 49

На рис. 50 наведений приклад перетину конуса з фронтально-проекціуючою площиною $\Sigma(\Sigma_2)$ по еліпсу. Проекції цього еліпса на Π_2 — відрізок прямої, який належить сліду-проекції Σ_2 площини Σ , а на площинах Π_1 та Π_3 — еліпси, які визначаються відповідними проекціями осей AB і CD . Велика вісь AB еліпса паралельна фронтальній площині проєкцій і визначається точками перетину січної площини з обрисними твірними на Π_2 . Мала вісь CD розташована перпендикулярно великій осі AB та проходить через її середину. Для її знаходження треба розділити проєкцію A_2B_2 відрізка AB навпіл, отримаємо $C_2=D_2$, після чого знаходимо інші проєкції точок C і D .

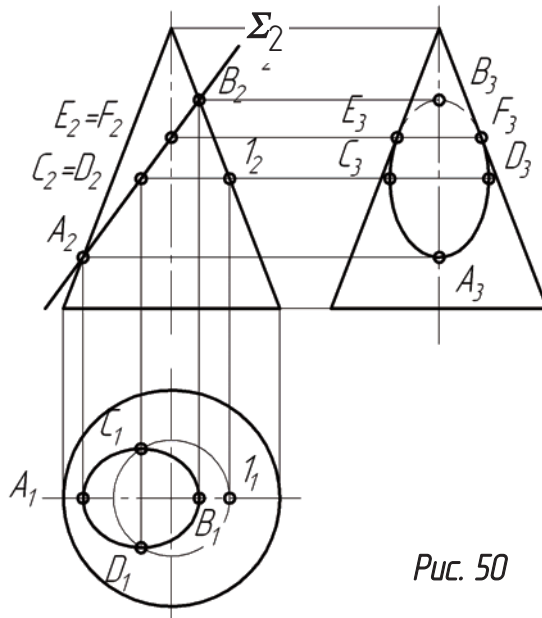


Рис. 50

Точки E і F — межі видимості еліпса на Π_3 і розташовані на обрисних твірних.

На рис. 51 наведено приклад перетину конуса з горизонтально-проекціуючою площиною $\Sigma(\Sigma_1)$ по гіперболі. Кінці A і B дуги гіперболи визначають найнижчі точки гіперболи, а вершина C , що знаходиться на паралелі мінімального радіуса — найвищу.

Горизонтальна проекція C_1 точки C розташована посередині відрізка A_1B_1 . Точка D — межа видимості гіперболи на Π_2 , а точка E — на Π_3 .

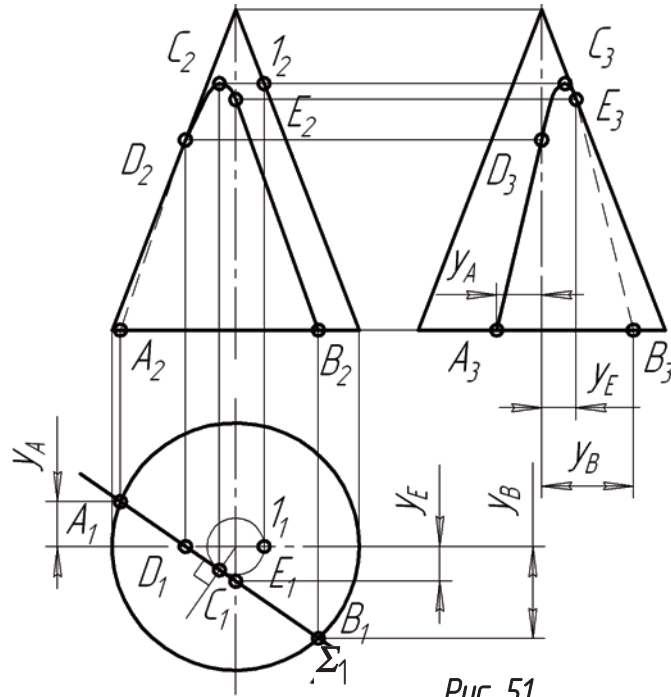


Рис. 51

Перетин сфери з площиною

Лінія перетину сфери з площиною завжди — коло.

На рис. 52 наведений приклад перетину сфери з фронтально-проекціуючою площиною $\Sigma(\Sigma_2)$. Переріз — коло діаметра d , проекція кола на площину Π_2 — відрізок прямої, який дорівнює діаметру d кола та належить сліду-проекції Σ_2 площини Σ , на площини Π_1 і Π_3 — еліпси. Великі вісі кожного з них дорівнюють діаметру d кола перерізу, а величини малих осей залежать від кута нахилу площини Σ до відповідних площин проекцій і визначаються за проекційним зв'язком. Точки E і F та K і L — межі видимості кола на площинах Π_3 і Π_1 відповідно.

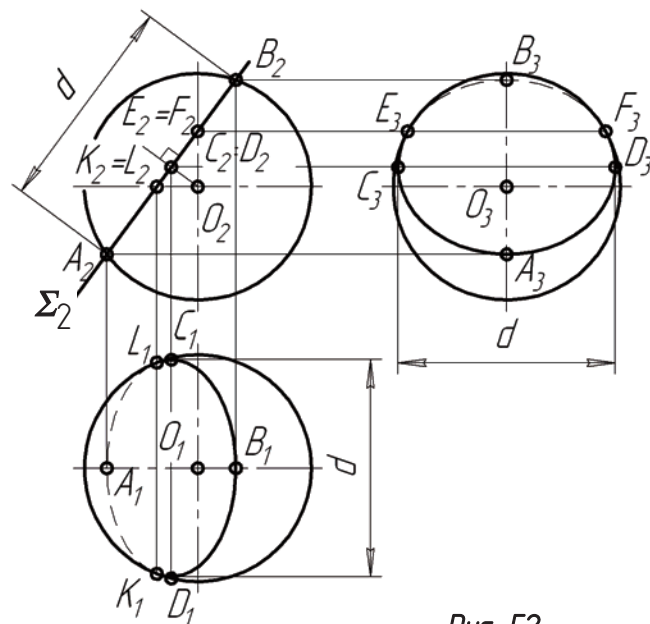


Рис. 52

Побудова лінії перетину поверхонь площинами загального положення, як правило, виконується за допомогою перетворення площини загального положення в проєкціюючу. Таким чином, розв'язання задачі спрощується і зводиться до випадків, які аналогічні розглянутим вище.

Розгортки поверхонь

Розгорткою гранної поверхні називається плоска фігура, яка одержана послідовним суміщенням граней гранної поверхні з площиною розгортки. На розгортці всі відрізки ліній та кути між лініями зображуються в натуральну величину. Тому для побудови розгортки необхідно визначити натуральні величини всіх ребер поверхні.

Для побудови розгортки криволінійні поверхні апроксимуються (замінюються з достатньою точністю) гранними поверхнями (зазвичай в криволінійну поверхню вписують багатогранник, наприклад, призму або піраміду) та будують їх розгортки.

Найкоротша лінія між двома точками на поверхні називається геодезичною. На розгортці поверхні геодезична лінія є відрізком прямої.

Для побудови геодезичної лінії на проєкціях поверхні необхідно:

- побудувати розгортку поверхні та нанести на ній граничні точки геодезичної лінії;
- з'єднати на розгортці граничні точки відрізком прямої;
- визначити проміжні точки геодезичної лінії на розгортці та перенести їх на проєкції;
- з'єднати отримані точки на проєкціях поверхні кривою або ламаною лінією, в залежності від типу поверхні.

Побудова розгортки гранної поверхні (призма) з нанесенням лінії перерізу її фронтально-проєкціюючою площиною $\Sigma(\Sigma_2)$ наведена на рис. 53.

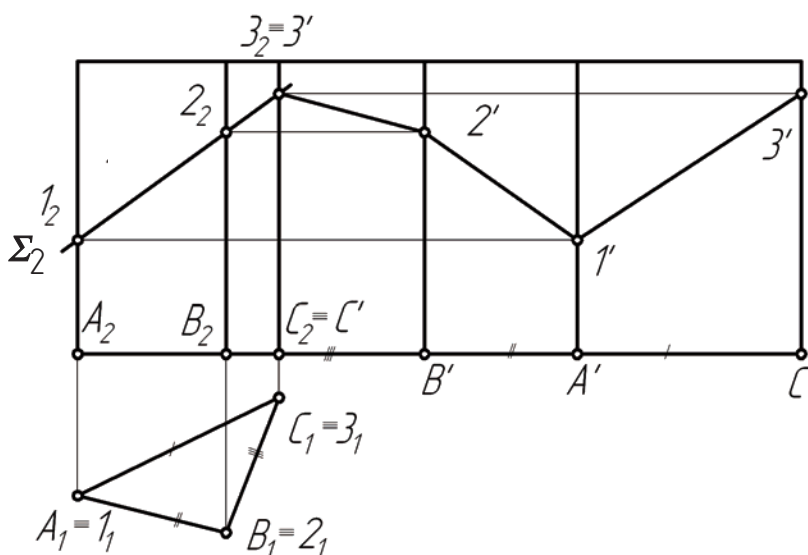


Рис. 53

Побудова розгортки криволінійної поверхні (конус) з визначенням геодезичної лінії KM наведена на рис. 54.

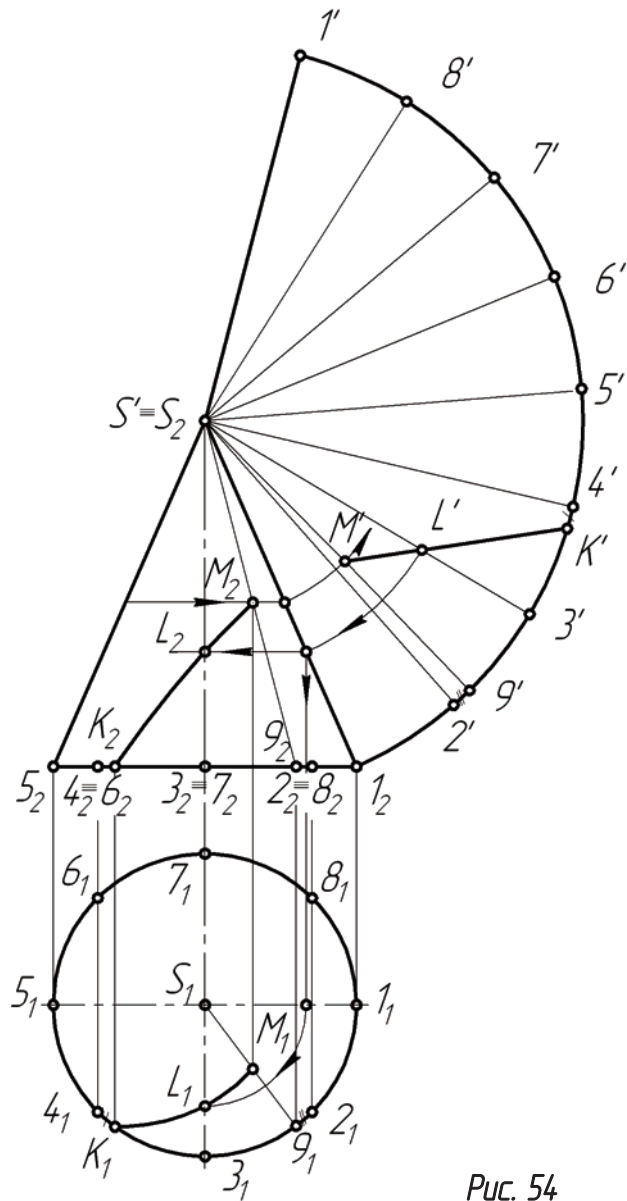


Рис. 54

Питання та завдання для самоперевірки

1. Які точки треба визначити для побудови лінії перетину поверхні з площиною?
2. З якою метою застосовуються проміжні точки при визначенні лінії перетину площини з поверхнею?
3. По якій лінії перетинається площина зі сферою? Як проєкціюється ця лінія на площини проєкцій?
4. Що таке розгортка поверхні?
5. Як будується геодезична лінія поверхні?

Тема 6. Перетин поверхонь площинами. Подвійне проникання

Основні теоретичні відомості Одинарне проникання

Задача полягає в побудові трьох проекцій геометричного тіла, яке обмежене гранню чи криволінійною поверхнею. Геометричне тіло, яке задане двома проекціями, перетинається наскрізним призматичним фронтально-проекціуючим отвором.

Розглянемо розв'язання наведеної задачі на прикладі (рис. 55).

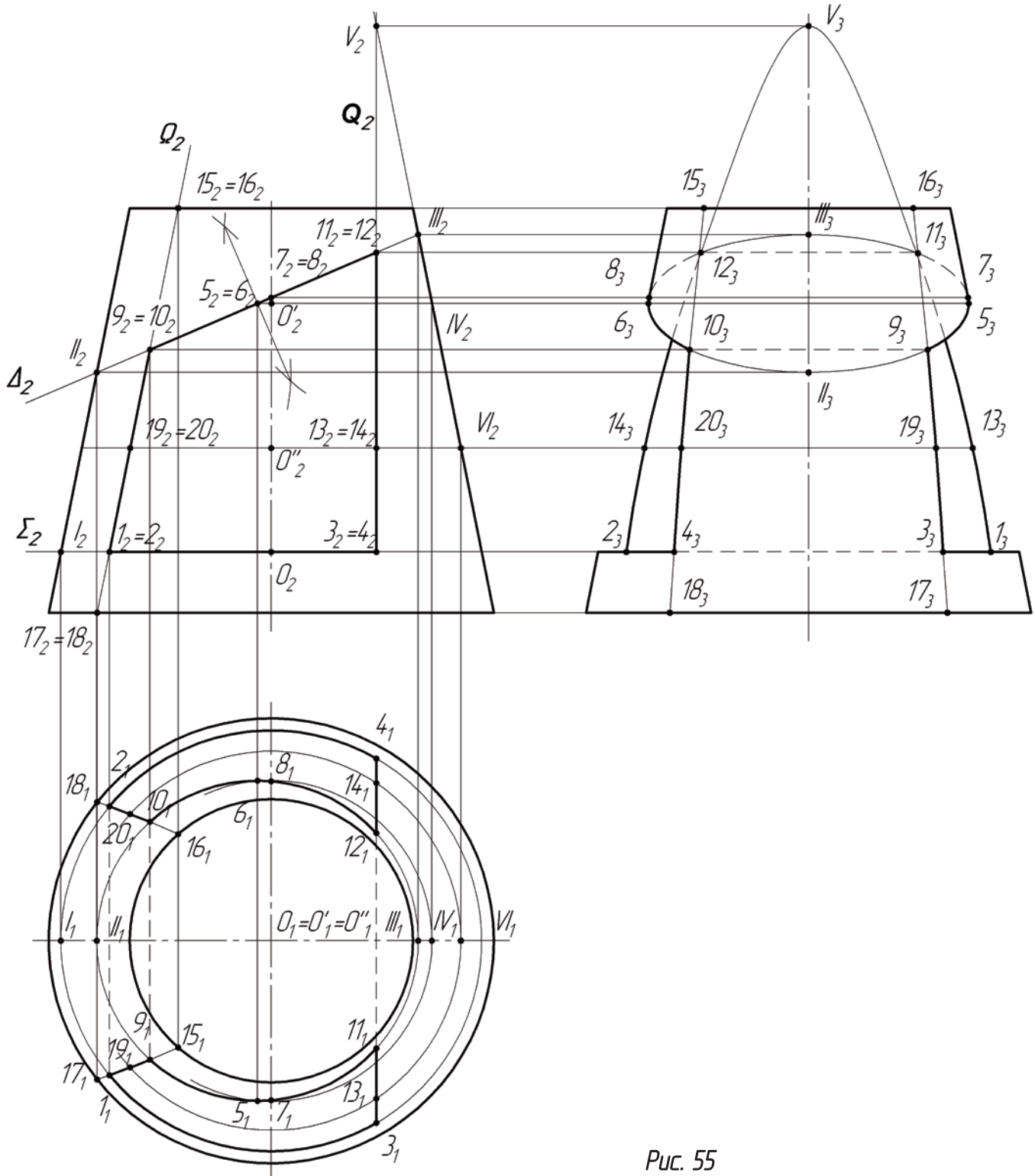


Рис. 55

Задачу розв'язують методом повних перерізів за таким алгоритмом.

1. Аналізують форму поверхні, що обмежує геометричне тіло.

На рис. 55 — це конічна поверхня. Отвір має форму чотирикутної фронтально-проекціуючої призми.

2. Через кожну грань призматичного отвору проводять допоміжну фронтально-проекціуючу площину (Σ , Δ , Θ , Ω). Потім тонкою суцільною лінією будують повний переріз конічної поверхні допоміжною площиною.

Проаналізуємо вигляд перерізів конічної поверхні кожною з чотирьох допоміжних площин.

Повний переріз конічної поверхні горизонтальною площиною Σ дає коло радіуса $R=OI$, яке на Π_1 проєкціюється в натуральну величину, а на Π_2 і Π_3 — у горизонтальні відрізки довжиною $2R$.

Повний переріз конічної поверхні верхньою похилою площиною Δ дає еліпс, одна з осей якого обмежена точками II та III , які знаходяться на перетині обрисних твірних конуса на Π_2 з площиною Δ . Фронтальна проєкція другої осі цього еліпса 5_2-6_2 знаходиться посередині відрізка II_2-III_2 . Ще одна пара характерних точок 7 і 8 лінії перерізу знаходиться на перетині січної площини Δ та двох твірних, які є обрисом конуса на Π_3 . Для побудови еліпса також визначені проміжні точки $9, 10, 11, 12$.

Площина Θ , яка проведена через праву грань отвору, перетинає конічну поверхню по гіперболі. Щоб побудувати вершину V гіперболи, продовжують праву обрисну на Π_2 твірну конуса до перетину з площиною Θ . Визначені також допоміжні точки $11, 12, 3, 4, 13$ і 14 , через які проходить гіпербола.

Площина Ω , яка проведена через ліву грань призматичного отвору, паралельна лівій твірній конуса. Вона перетинає конус по параболі. Оскільки побудова вершини параболі виходить далеко за межі рисунку, визначені допоміжні точки $1, 2, 9, 10, 15, 16, 17, 18, 19, 20$, через які проведено дуги параболі.

Побудовані лінії повних перерізів проведені тонкими суцільними лініями.

3. На повних перерізах конічної поверхні виділяють частини, які належать граням призматичної поверхні.

Це дуги кола 13 і 24 що належать нижній грані, дуги еліпса 911 і 1012 , що належать верхній грані, дуги гіперболи 311 і 412 , що належать правій грані, та дуги параболі 19 і 210 , що належать лівій грані отвору. Визначають їх видимість на кожній площині проєкцій. Видимі елементи позначають суцільною товстою основною лінією, невидимі — штриховою.

4. На обрисних твірних поверхні видаляють частини, що вирізані призматичним отвором. Це відрізки обрисних твірних конічної поверхні на Π_3 , які обмежені точками 7 і 8 та нижньою гранню отвору.

5. Визначають ребра призматичної поверхні отвору.

Це відрізки $1-2, 3-4, 9-10$ та $11-12$. На Π_1 та Π_3 вони невидимі, тому зображені штриховою лінією.

Зображення геометричних тіл складної форми

Зображення на креслениках виконують відповідно за ГОСТ 2.305-68. Для виявлення форми предмета на креслениках застосовують **шість основних видів**, що утворюються проєкціюванням на грані куба: вид спереду (головний вид), вид зверху, вид зліва, вид справа, вид знизу, вид ззаду.

Вид — це зображення видимої спостерігачеві частини поверхні предмета.

Крім основних видів користуються **додатковими видами**, що утворюються проєкціюванням на площини, що не паралельні основним площинам проєкцій, та **місцевими видами**, на яких показують обмежену частину поверхні предмета.

Для виявлення внутрішньої форми предмета на креслениках застосовують розрізи та перерізи.

Розрізом називається зображення предмета, який умовно розсічений однією або кількома площинами. Частина предмета, що розміщена між спостерігачем і січною площиною, умовно відкидається. В розрізі показують те, що розміщене в січній площині і за нею. Фігура, що розташована у січній площині, називається **перерізом** і виділяється штриховкою.

Положення січної площини вказують розімкнутою лінією — слідом-проєкцією січної площини, перпендикулярно до якої креслять стрілки, що вказують напрям зору. Обидві стрілки позначають однією і тією ж великою літерою. Розріз надписують на кресленику, наприклад, *А-А*, *Б-Б* тощо (рис. 56).

Якщо січна площина збігається з площиною симетрії предмета і розріз розміщений в проєкційному зв'язку на відповідному основному виді, то положення січної площини не позначають і написом розріз не супроводжують.

Дозволяється на одному зображенні поєднувати половину розрізу з половиною виду, якщо обидва зображення симетричні відносно однієї і тієї ж осі, яка їх розділяє.

Якщо суцільна товста основна лінія зображення (наприклад, ребро) розташована на осі симетрії, між видом і розрізом проводять хвилясту лінію обриву.

Зображення на кресленику виконують в проєкційному зв'язку, але лінії зв'язку не проводять, осі проєкцій не показують. На кресленику наносять необхідні розміри.

Перетин поверхонь площинами. Подвійне проникання

Розглянемо алгоритм розв'язання задачі на прикладі, що наведений на рис. 56.

1. Аналізують графічну умову задачі та встановлюють форму поверхонь, що обмежують геометричне тіло.

Зовнішня поверхня тіла — циліндрична, а внутрішня — поверхня правильної чотирикутної піраміди. Призматичний отвір має в нормальному перерізі форму рівнобічного трикутника.

2. Будують вид зліва без врахування ліній перетину.

3. Розв'язують зовнішню задачу: будують лінії перетину зовнішньої поверхні геометричного тіла з призматичним отвором.

Для цього застосовують метод повних перерізів та залишають частини лінії перетину, що належать граням отвору.

На виді зліва видаляють частини обрисних твірних циліндра, які вирізані призматичним отвором.

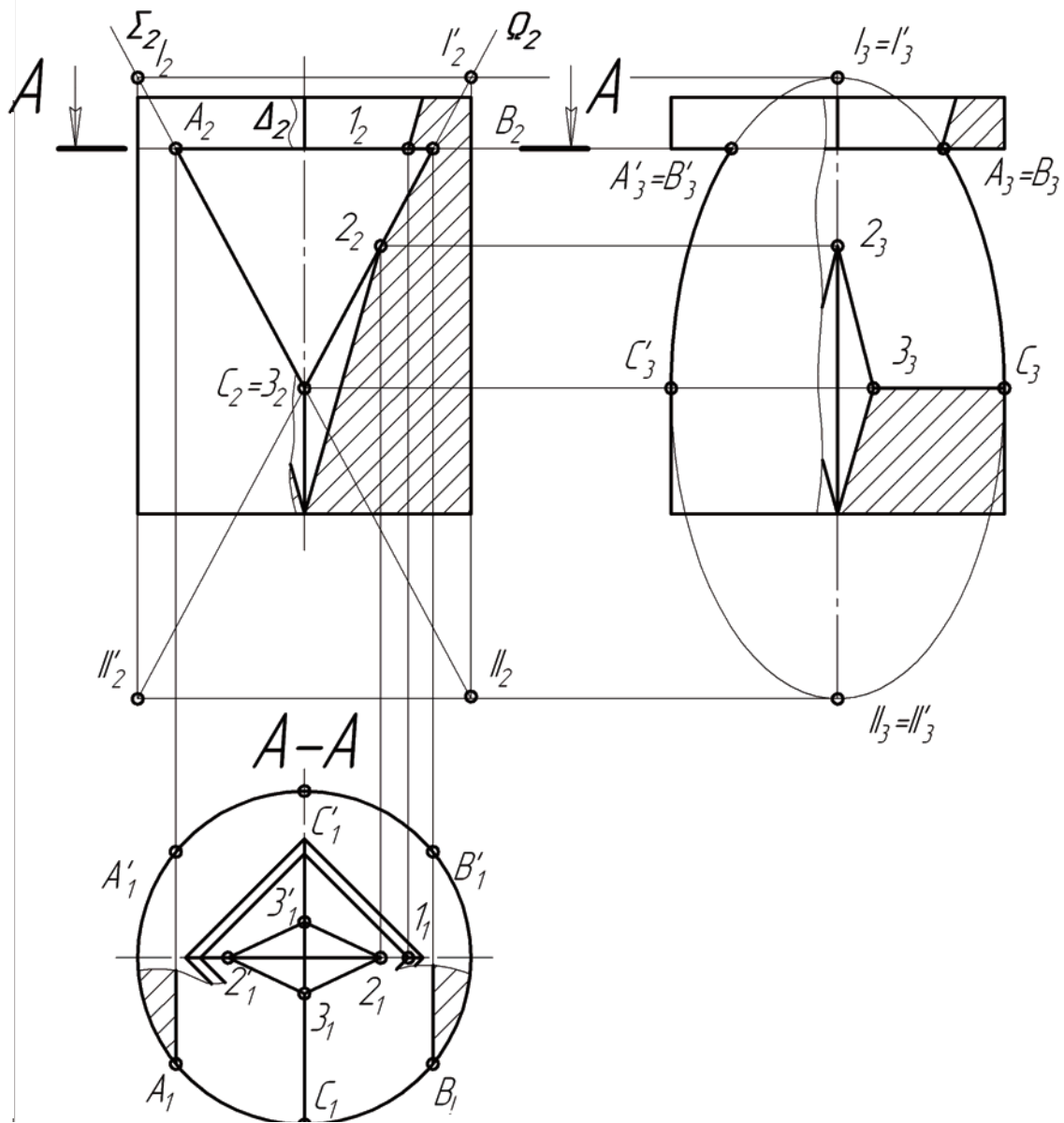


Рис. 56

4. Планують виконання розрізів для розкриття форми внутрішньої поверхні.

Так, на всіх трьох видах доцільно поєднати половину виду з половиною розрізу за допомогою тонкої хвилястої лінії, оскільки у даному випадку на всіх зображеннях геометричного тіла ребра піраміди розташовані на осях симетрії. Площина горизонтального розрізу має бути проведена по найширшій частині отвору або по найширшій частині зовнішньої поверхні. У даному випадку розріз виконаний по верхній грані отвору. Два інших розрізи утворені січними площинами, які збігаються з площинами симетрії зображень.

5. Розв'язують внутрішню задачу: визначають лінію перетину правильної чотирикутної піраміди з призматичним отвором.

Оскільки грані поверхні перетинаються по ламаній лінії, достатньо визначити вершини ламаної та з'єднати їх відрізками прямих. Тому повний переріз побудований лише для площини Δ , а для решти — тільки вершини 2, 2', 3 і 3'.

На видах зверху та зліва видаляють частини ребер піраміди, які вирізані призматичним отвором.

6. Визначають ребра призматичного отвору.

У даному випадку це ребра — $A-A'$, $B-B'$, $C-3$ і $C'-3'$. Суцільною товстою лінією наводять видимі відрізки цих ребер.

7. Остаточнo оформлюють розрізи.

Виконуючи горизонтальний розріз, позначають положення січної площини $A-A$. Позначення фронтального та горизонтального розрізів не виконують. На всіх зображеннях наносять розміри та штриховку.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Наведіть алгоритм розв'язання задачі на перетин поверхні з призматичним отвором.
2. Який метод доцільно застосовувати для визначення лінії перетину поверхні обертання з призматичним отвором?
3. Як визначається видимість лінії перетину поверхні з отвором?
4. Наведіть алгоритм розв'язання задачі на подвійне проникання.

Тема 7. Перетин поверхонь

Основні теоретичні відомості

Лінією перетину поверхонь називається лінія, точки якої належать обом поверхням водночас. Її форма залежить від форми та взаємного положення поверхонь (рис. 57).

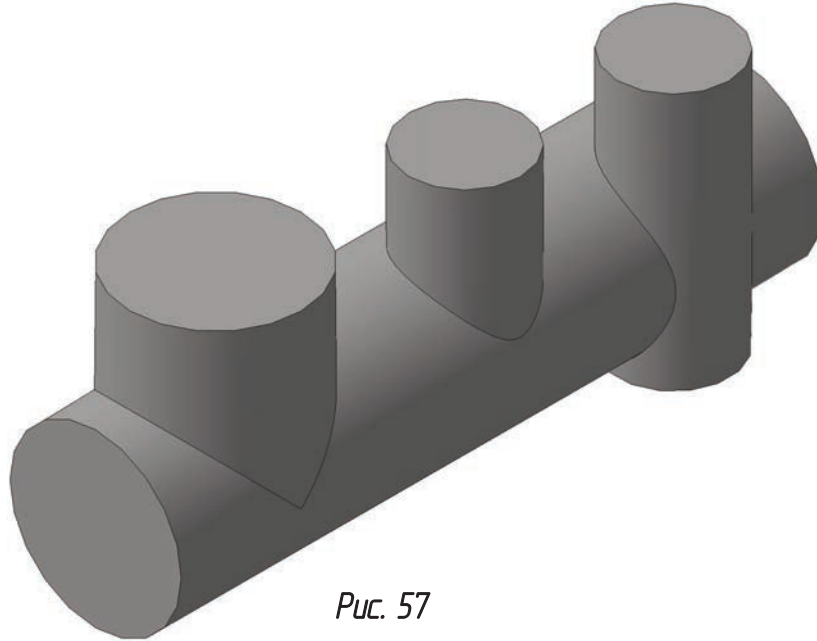


Рис. 57

Дві криві поверхні перетинаються по просторовій кривій лінії.

Лінія перетину двох гранних поверхонь — просторова ламана.

Лінія перетину кривої поверхні з гранною — просторова ламана, ланки якої — дуги плоских кривих.

Основний метод побудови лінії перетину поверхонь — метод поверхонь-посередників.

Алгоритм графічних побудов (рис. 58):

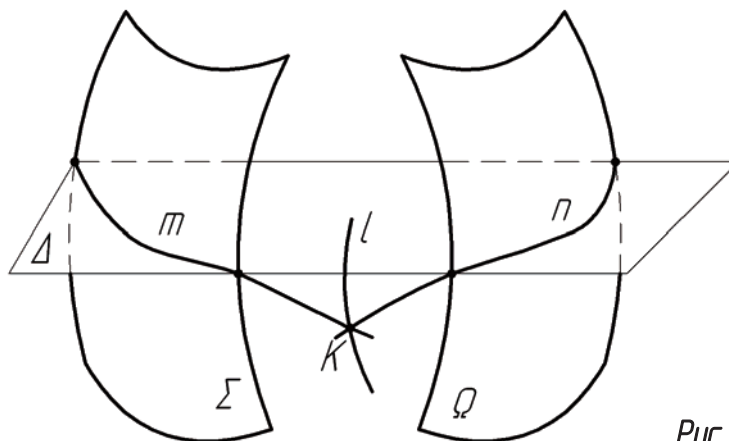


Рис. 58

— вибрати посередники, які перетинають задані поверхні по найбільш простих лініях: прямих або колах;

— провести посередник Δ та побудувати лінії перетину посередника з обома заданими поверхнями: $m = \Delta \cap \Sigma$, $n = \Delta \cap \Omega$;

— визначити точки перетину побудованих ліній $K = m \cap n$; ці точки належать лінії перетину заданих поверхонь $K \in l$;

— вибрати новий посередник та повторювати вище вказані дії, поки не буде одержано достатньо точок для побудови лінії l перетину поверхонь;

— з'єднати одержані точки, враховуючи видимість окремих частин лінії перетину.

Побудову лінії перетину слід починати з визначення характерних точок, до яких відносяться точки на обрисах поверхонь, точки найвищі і найнижчі, крайні ліві і крайні праві на усіх проекціях.

Побудова ліній перетину поверхонь

за допомогою посередників-площин окремого положення

На рис.59, 60 наведено побудову лінії перетину поверхонь конуса і циліндра.

Посередники:

— горизонтальні площини $\Sigma(\Sigma_2)$, $\Delta(\Delta_2)$. Ці площини перетинають конус по колах, а циліндр — по прямих (твірні);

— фронтальна площина $\Omega(\Omega_1)$, яка перетинає поверхні по обрисах на фронтальній проекції.

Характерні точки перетину: на горизонтальній проекції — точки 3_1 і 4_1 , які належать обрису циліндра (посередник — площина $\Sigma(\Sigma_2)$); на фронтальній проекції точки 1_2 і 2_2 , що побудовані за допомогою площини $\Omega(\Omega_1)$.

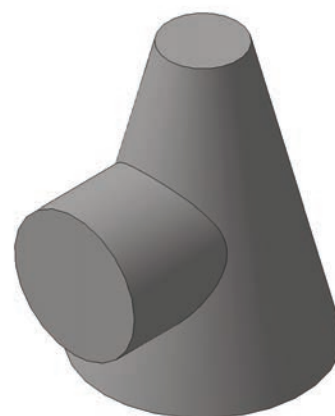


Рис. 59

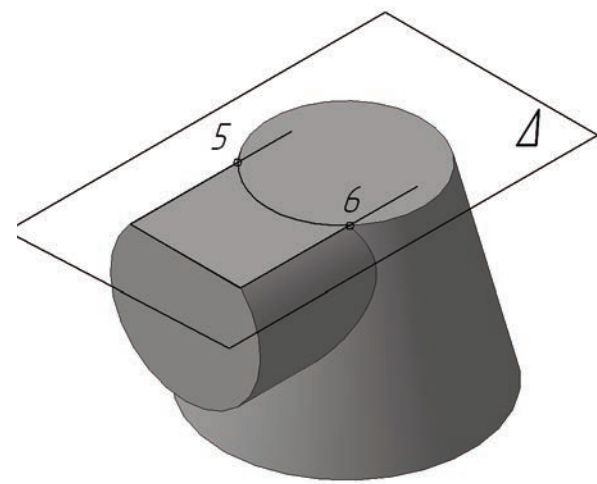
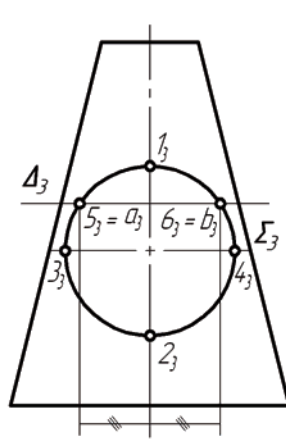
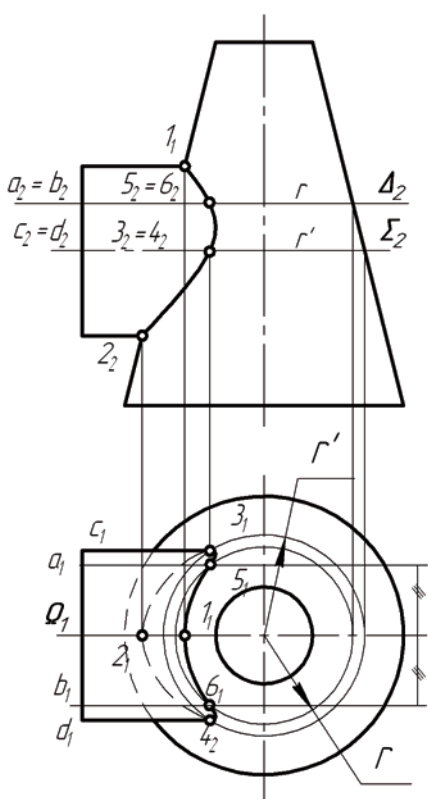


Рис. 60

Побудова ліній перетину поверхонь за допомогою сферичних посередників

Для використання сферичних поверхонь як посередників необхідна наявність наступних умов:

- обидві поверхні, що перетинаються, — поверхні обертання;
- вісі поверхонь перетинаються;
- вісі поверхонь паралельні одній площині проєкцій.

Якщо центр сфери належить осі довільної поверхні обертання, то поверхні перетинаються по колах, які на одній площині проєкцій зображуються відрізками прямих (рис.61), що зручно для їх застосовування як посередників при визначенні лінії перетину поверхонь обертання.

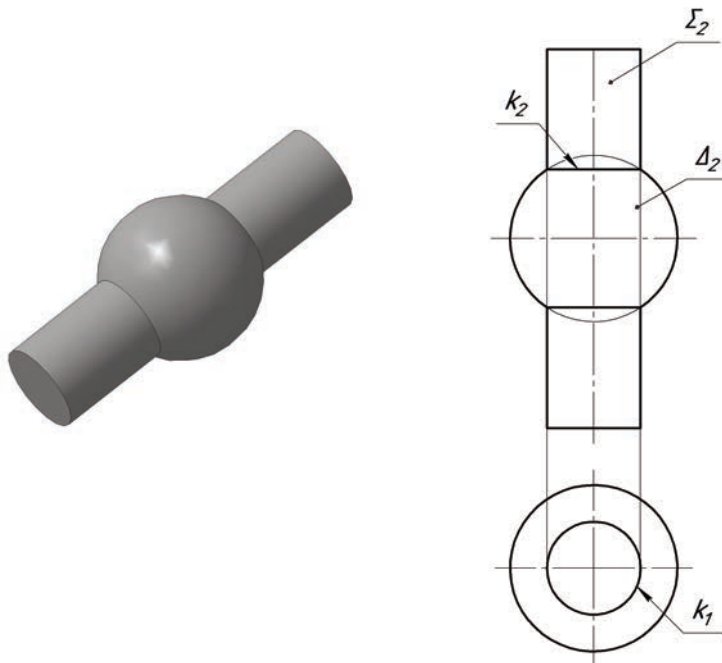


Рис. 61

На рис. 62 наведено приклад визначення лінії перетину двох конічних поверхонь із застосуванням сферичних посередників.

Центри сфер-посередників знаходяться в точці $O(O_1, O_2)$ перетину осей заданих конічних поверхонь. Сфера Δ' найменшого радіуса R_{min} дотикається до однієї з поверхонь, а іншу перетинає. З її допомогою визначені точки 3 і 4.

Сфера Δ максимального радіуса R_{max} проходить через найвіддаленішу точку перетину обрисів поверхонь. З її допомогою визначена точка 1. Оскільки обидві поверхні мають спільну фронтальну площину симетрії, їх обриси на фронтальній проєкції перетинаються. Тому сферу максимального радіуса можна не будувати, а безпосередньо визначити точки перетину обрисів на Π_2 . Це точки 1 і 2.

На рис. 62 наведена сфера Δ'' проміжного радіуса, яка визначає точки 7 і 8.

Горизонтальні проєкції точок 3, 4, 7 і 8 побудовані за допомогою паралелей зрізаного конуса.

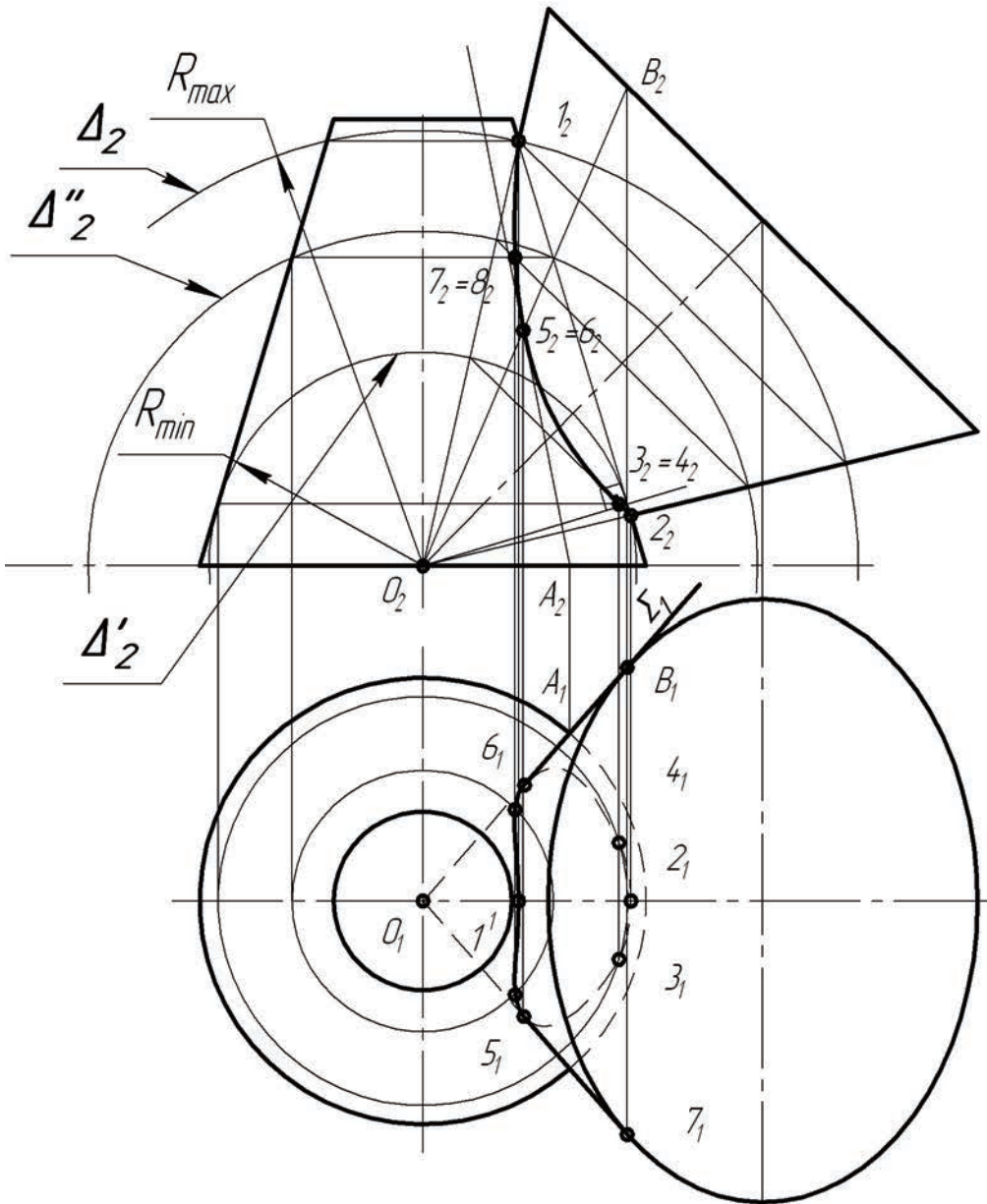


Рис. 62

Для визначення точок на обрисі конуса з похилою віссю проведена горизонтально-проекціуюча площина $\Sigma(\Sigma_1)$ через одну з обрисних твірних.

Ця площина перетинає обидві поверхні по твірних і визначає точки 5 і 6.

Отримані точки з'єднані кривою лінією з урахуванням видимості.

Окремі випадки

Теорема Монжа. Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої поверхні другого порядку (або вписані в неї), то лінія їх перетину розпадається на дві плоскі криві другого порядку (рис.63).

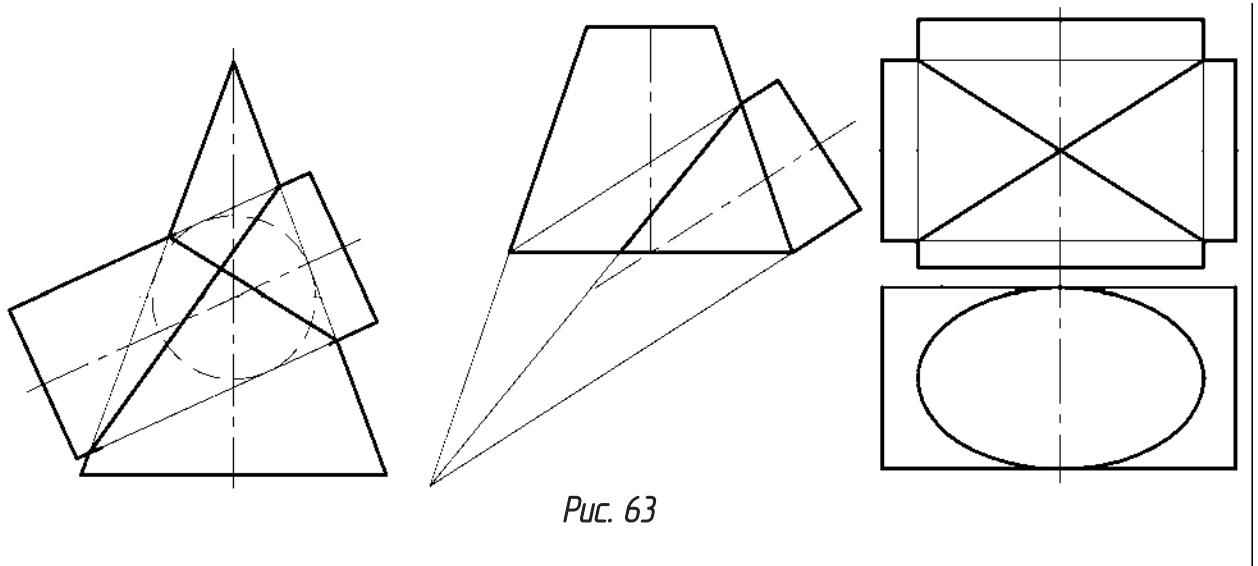


Рис. 63

Питання та завдання для самоперевірки

1. Яким методом визначається лінія перетину двох поверхонь?
2. Наведить перелік основних посередників, за допомогою яких будується лінія перетину двох поверхонь?
3. Як спрощується побудова лінії взаємного перетину поверхонь, якщо одна з поверхонь проекціуюча?
4. У якому випадку лінія перетину поверхонь розпадається на дві плоскі криві?

ЛІТЕРАТУРА

1. Ванін В.В, Перевертун В.В, Надкернична Т.М. та ін. Інженерна та комп'ютерна графіка. К.: Вид.гр.ВНУ, 2009.
2. Михайленко В.Є., Ванін В.В., Ковальов С.М. Інженерна та комп'ютерна графіка. — К.: Каравела, 2003.
3. Бубунников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия. — М.: Высш.шк., 1973.
4. Посвянский А.Д. Краткий курс начертательной геометрии. — М.: Высш.шк., 1970.
5. Хаскін А.М. Креслення. — К.: Вища шк., 1976.
6. Ванін В.В., Білицька Н.В., Гетьман О.Г., Міхлевська Н.В. Навчальні завдання з нарисної геометрії та інженерної графіки для програмованого навчання студентів немеханічних спеціальностей.— К.: НТУУ “КПІ”, 2013. — 60 с.

Навчальне видання

Ванін Володимир Володимирович
Білицька Надія Василівна.
Гетьман Олександра Георгіївна
Міхлевська Наталія Вікторівна

Короткий курс лекцій з інженерної графіки для студентів немеханічних спеціальностей

Відповідальний редактор: Голова Ольга Олександрівна
Рецензент: Гнітецька Галина Омелянівна